Capítulo 5

Determinantes

Los determinantes aparecieron originalmente al tratar de resolver sistemas de ecuaciones lineales. A continuación vamos a dar una definición precisa de determinante y a relacionarlo, entre otras cosas, con la inversibilidad de matrices.

En el caso de matrices en $K^{2\times 2}$, sabemos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es inversible si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Este escalar $ad - bc$ se llama el determinante de la matriz A. Para $n > 2$, el determinante de una matriz en $K^{n\times n}$ es también un escalar que se calcula a partir de los coeficientes de la matriz.

5.1 Definición y ejemplos básicos

Existen distintas definiciones alternativas de determinante. La definición que daremos introduce al determinante como una función particular de $K^{n\times n}$ en K.

5.1.1 Funciones multilineales alternadas

En esta sección daremos la definición y estudiaremos algunas propiedades básicas de funciones multilineales y alternadas, las que nos permitirán definir el determinante.

Notación. Dada una matriz $A \in K^{n\times n}$ cuyas columnas son $A_1, \dots, A_n$ escribiremos $A = (\, A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n \,)$.

Definición 5.1 Una función $f : K^{n\times n} \to K$ se dice *multilineal alternada (por columnas)* si para cada $1 \le i \le n$:

i) $f(A_1 \mid \dots \mid A_i + A_i' \mid \dots \mid A_n) = f(A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n) + f(A_1 \mid \dots \mid A_i' \mid \dots \mid A_n)$.

ii) $f(\, A_1 \mid \dots \mid \lambda.A_i \mid \dots \mid A_n \,) = \lambda \cdot f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n \,)$ para todo $\lambda \in K$.

iii) $f(\, A_1 \mid \dots \mid \underbrace{A_i}_{col.\, i} \mid \dots \mid \underbrace{A_i}_{col.\, j} \mid \dots \mid A_n \,) = 0$ para cada $j \neq i$, $1 \le j \le n$ (es decir, si la matriz A tiene dos columnas iguales, $f(A) = 0$).

Ejemplos.

1. $f : K^{1\times 1} \to K$ es multilineal alternada si y sólo si f es lineal.

2. $f : K^{2\times 2} \to K$ definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ es multilineal alternada:

   i) $f\begin{pmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{pmatrix} = (a + a')d - b(c + c') = ad - bc + a'd - bc' =$
   $$= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}.$$
   Análogamente se prueba la aditividad en la segunda columna.

   ii) $f\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - b\lambda c = \lambda(ad - bc) = \lambda \cdot f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para todo $\lambda \in K$, y lo mismo vale en la segunda columna.

   iii) $f\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0$.

En la siguiente proposición damos algunas de las propiedades básicas que verifica toda función multilineal alternada.

Proposición 5.2 *Sea $f : K^{n\times n} \to K$ multilineal alternada. Entonces*

i) $f(\, A_1 \mid \dots \mid \underbrace{\vec{0}}_{col.\, i} \mid \dots \mid A_n \,) = 0 \quad \forall\, 1 \le i \le n.$

ii) $f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_n \,) = -f(\, A_1 \mid \dots \mid \underbrace{A_j}_{col.\, i} \mid \dots \mid \underbrace{A_i}_{col.\, j} \mid \dots \mid A_n \,).$

iii) $f(\, A_1 \mid \dots \mid \underbrace{A_i + \alpha A_j}_{col.\, i} \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_n \,) = f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_n \,).$

iv) *Si* $A_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \alpha_j A_j$, *entonces* $f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n \,) = 0$.

Demostración.

i) $f(A_1 \mid \dots \mid \vec{0} \mid \dots \mid A_n) = f(A_1 \mid \dots \mid 0.\vec{0} \mid \dots \mid A_n) = 0{\cdot}f(A_1 \mid \dots \mid \vec{0} \mid \dots \mid A_n) = 0.$

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$. Consideremos la matriz que en las columnas i y j tiene la suma de las columnas i y j de A. Por la definición de función multilineal alternada se tiene que $f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i + A_j \mid \dots \mid A_i + A_j \mid \dots \mid A_n \,) = 0$ y, por lo tanto, vale:

$$\begin{aligned}
0 &= f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_i + A_j \mid \dots \mid A_n \,) + \\
&\qquad\qquad + f(\, A_1 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_i + A_j \mid \dots \mid A_n \,) \\
&= f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n \,) + f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_n \,) + \\
&\quad + f(\, A_1 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n \,) + f(\, A_1 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_n \,) \\
&= f(\, A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_n \,) + f(\, A_1 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n \,),
\end{aligned}$$

de donde

$$f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_n\,) = -f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_n\,).$$

$iii)$ Se tiene que

$$\begin{aligned}&f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_i + \alpha A_j \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_n\,) =\\ &= f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_n\,) + \alpha f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_n\,) =\\ &= f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_n\,),\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de i) y ii) de la definición 5.1, y la tercera se deduce de iii) de dicha definición.

$iv)$ Si $A_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j A_j$, entonces

$$\begin{aligned} f(\,A_1 \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_n\,) &= f(\,A_1 \mid \ldots \mid \overbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j A_j}^{col.i} \mid \ldots \mid A_n\,)\\ &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j f(\,A_1 \mid \ldots \mid \underbrace{A_j}_{col.\,i} \mid \ldots \mid A_n\,) = 0. \end{aligned}$$ □

Podemos ahora caracterizar fácilmente *todas* las funciones multilineales alternadas de $K^{2\times 2}$ en K y ver cómo puede definirse el determinante en este caso particular.

Ejemplo. Hallar todas las funciones multilineales alternadas $f : K^{2\times 2} \to K$.

Si $f : K^{2\times 2} \to K$ es multilineal alternada, entonces:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b\\ c & d\end{pmatrix} && \text{(Def. 5.1 i) en primera columna)}\\
&= f\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b\\ c & 0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & d\end{pmatrix} &&\\
& && \text{(Def. 5.1 i) en segunda columna)}\\
&= f\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b\\ c & 0\end{pmatrix} && \text{(Prop. 5.2 i))}\\
&= ad.\ f\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + cb.\ f\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} && \text{(Def. 5.1 ii))}\\
&= (ad - cb).\ f\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} && \text{(Prop. 5.2 ii))}
\end{aligned}$$

Por otro lado, toda función de este tipo es multilineal alternada (comparar con el Ejemplo 2 de la página 74). Luego, todas las funciones multilineales alternadas $f : K^{2\times 2} \to K$ son de la forma $f\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \alpha\,(ad - bc)$ con $\alpha \in K$.

Vemos entonces que una forma posible de definir una función de $K^{2\times 2}$ en K que coincide con lo que conocemos como determinante en dicha situación es como la única función f multilineal alternada tal que $f(I_2) = 1$.

En la próxima sección, generalizaremos lo que hemos visto en el ejemplo anterior para matrices en $K^{2\times 2}$ a matrices en $K^{n\times n}$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

5.1.2 Existencia y unicidad del determinante

El siguiente lema que relaciona una función multilineal alternada definida en $K^{(n+1)\times(n+1)}$ con otras definidas en $K^{n\times n}$ será la base para un argumento recursivo que nos permitirá probar la unicidad de la función determinante.

Lema 5.3 *Sea* $f : K^{(n+1)\times(n+1)} \to K$ *una función multilineal alternada tal que* $f(I_{n+1}) = \alpha$. *Sea* i *con* $1 \le i \le n+1$. *Se define* $f_i : K^{n\times n} \to K$ *como*

$$f_i(A) = f\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & 0 & a_{1\,i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,i-1} & 0 & a_{i-1\,i} & \dots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i\,i-1} & 0 & a_{i\,i} & \dots & a_{i\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & 0 & a_{n\,i} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad si\ A = (a_{jl})_{1\le j,l\le n}.$$

Entonces f_i *es una función multilineal alternada y* $f_i(I_n) = \alpha$.

Demostración. De la definición de f_i y del hecho que f es multilineal alternada, se deduce fácilmente que f_i es multilineal alternada.
Además, $f_i(I_n) = f(I_{n+1}) = \alpha$. □

Veamos cómo puede utilizarse este resultado para hallar una función multilineal alternada de $K^{3\times 3}$ en K con un determinado valor sobre I_3 conociendo las funciones multilineales alternadas de $K^{2\times 2}$ en K:

Ejemplo. Hallar $f : K^{3\times 3} \to K$ multilineal alternada tal que $f(I_3) = 1$.

Supongamos que f satisface lo pedido. Entonces

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= a.f\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + d.f\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + g.f\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{pmatrix} \\ &= a.f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + d.f\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + g.f\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a.f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} - d.f\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & i \end{pmatrix} + g.f\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= a.\,f_1\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d.\,f_2\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g.\,f_3\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Por el lema anterior, $f_1, f_2, f_3 : K^{2\times 2} \to K$ son funciones multilineales alternadas que en la identidad I_2 valen 1. Pero ya vimos, en un ejemplo anterior, que hay una única función que cumple esto, a saber, $g : K^{2\times 2} \to K$, definida por $g\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma$.
En consecuencia

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a.(ei - hf) - d.(bi - hc) + g.(bf - ce).$$

Además, esta f cumple lo pedido con lo cual resulta que es la única función multilineal alternada tal que $f(I_3) = 1$.

El siguiente teorema nos permite definir la noción de determinante en general.

Teorema 5.4 *Sea $\alpha \in K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única función multilineal alternada $f : K^{n\times n} \to K$ tal que $f(I_n) = \alpha$.*

Definición 5.5 La única función multilineal alternada $f : K^{n\times n} \to K$ tal que $f(I_n) = 1$ se llama el *determinante de orden n*.

Demostración. Dada $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$, notaremos $A(i|j) \in K^{n\times n}$ a la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j de A.

Existencia. Por inducción en n.
Para $n = 1$, definimos $f : K^{1\times 1} \to K$, $f(x) = \alpha.x$, que es multilineal alternada y cumple $f(1) = \alpha$.
Supongamos que existe $g : K^{n\times n} \to K$ multilineal alternada tal que $g(I_n) = \alpha$. Definimos $f : K^{(n+1)\times(n+1)} \to K$ como

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i}.\, g(A(1|i)) \qquad \text{si } A = (a_{j\ell})_{1\le j,\ell \le n+1}.$$

Veamos que f es multilineal alternada y que $f(I_n) = \alpha$.

i) Sean $A = (\, A_1 \mid \dots \mid A_k \mid \dots \mid A_{n+1}\,)$, $A' = (\, A_1 \mid \dots \mid A'_k \mid \dots \mid A_{n+1}\,)$ y $\widetilde{A} = (\, A_1 \mid \dots \mid A_k + A'_k \mid \dots \mid A_{n+1}\,)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\widetilde{A}) &= \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n+1} (-1)^{i+1}\, a_{1i}\, g(\widetilde{A}(1|i)) + (-1)^{k+1}\,(a_{1k} + a'_{1k})\, g(\widetilde{A}(1|k)) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i}\, g(A(1|i)) + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i}\, g(A'(1|i)) + \\ &\quad + (-1)^{k+1}\, a_{1k}\, g(A(1|k)) + (-1)^{k+1}\, a'_{1k}\, g(A'(1|k)) \\ &= f(A) + f(A'). \end{aligned}$$

ii) Sea $A = (\,A_1 \mid \dots \mid A_k \mid \dots \mid A_{n+1}\,)$ y sea $\widetilde{A} = (\,A_1 \mid \dots \mid \lambda A_k \mid \dots \mid A_{n+1}\,)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\widetilde{A}) &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}(-1)^{i+1}\, a_{1i}\, g(\widetilde{A}(1|i)) + (-1)^{k+1}\,\lambda\, a_{1k}\, g(\widetilde{A}(1|k)) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}(-1)^{i+1}\, a_{1i}\,\lambda\, g(A(1|i)) + (-1)^{k+1}\,\lambda\, a_{1k}\, g(A(1|k)) \\ &= \lambda\cdot f(A). \end{aligned}$$

iii) Sea $A = (\,A_1 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_{n+1}\,)$, donde la k-ésima columna coincide con la j-ésima ($k > j$). Entonces

$$f(A) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,j}}^{n+1} (-1)^{i+1}\, a_{1i}\, g(A(1|i)) + (-1)^{j+1}\, a_{1j}\, g(A(1|j)) + (-1)^{k+1}\, a_{1j}\, g(A(1|k)).$$

Observamos que para cada $i \neq j, k$, la matriz $A(1|i)$ tiene dos columnas iguales, con lo que $g(A(1|i)) = 0$. Además $A(1|j)$ y $A(1|k)$ sólo difieren en la posición de una columna: la j-ésima columna de $A(1|k)$ es la $(k-1)$-ésima columna de $A(1|j)$. En consecuencia, $A(1|j)$ puede obtenerse a partir de $A(1|k)$ mediante $k-1-j$ intercambios de columnas y por lo tanto, $g(A(1|k)) = (-1)^{k-1-j} g(A(1|j))$. Luego

$$\begin{aligned} f(A) &= (-1)^{j+1}\, a_{1j}\, g(A(1|j)) + (-1)^{k+1}\, a_{1j}\, (-1)^{k-1-j} g(A(1|j)) \\ &= ((-1)^{j+1} + (-1)^{2k-j})\, a_{1j}\, g(A(1|j)) = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que f es multilineal alternada.
Calculemos $f(I_{n+1})$. Se tiene que

$$f(I_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\,(I_{n+1})_{1i}.\, g(I_{n+1}(1|i)) = (-1)^2.1.\, g(I_n) = \alpha.$$

Unicidad. Por inducción en n.
Para $n = 1$, basta tener en cuenta que $f : K^{1\times 1} \to K$ es multilineal alternada si y sólo si es lineal. Por la condición $f(1) = \alpha$, resulta que la única función con las condiciones requeridas es $f(x) = \alpha.x$.
Supongamos que hay una única $g : K^{n\times n} \to K$ multilineal alternada con $g(I_n) = \alpha$.
Consideremos $f : K^{(n+1)\times(n+1)} \to K$ multilineal alternada tal que $f(I_{n+1}) = \alpha$. Sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1)\times(n+1)}$. Por linealidad en la primer columna, se tiene que

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1}\, .\, f\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n+1} \\ 1 & a_{i2} & \dots & a_{i\,n+1} \\ 0 & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n+1\,2} & \dots & a_{n+1\,n+1} \end{pmatrix}.$$

Restándole a la columna j la primer columna multiplicada por a_{ij} para $j = 2, \dots, n + 1$, por la Proposición 5.2 iii) tenemos que

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \,.\, f \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n+1\,2} & \dots & a_{n+1\,n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} a_{i1} \,.\, f \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1i} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,i} & 0 & a_{i-1\,i+1} & \dots & a_{i-1\,n+1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,i} & 0 & a_{i+1\,i+1} & \dots & a_{i+1\,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1\,2} & \dots & a_{n+1\,i} & 0 & a_{n+1\,i+1} & \dots & a_{n+1\,n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \,.\, f_i(A(i|1)).$$

Por el Lema 5.3, $f_i : K^{n\times n} \to K$ es una función multilineal alternada y $f_i(I_n) = \alpha$, luego debe ser $f_i = g$. Por lo tanto, $f(A)$ es necesariamente

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \,.\, g(A(i|1)),$$

de donde f es única. □

De la demostración anterior se deduce inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 5.6 *Sea $A \in K^{n\times n}$. Si para cada $r \in \mathbb{N}$,* det $: K^{r\times r} \to K$ *denota la función determinante de orden r (quedando en claro por el contexto de qué función determinante se trata), entonces*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \,.\, \det(A(i|1)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \,.\, \det(A(1|i)).$$

Las fórmulas recursivas para el cálculo del determinante de una matriz dadas en el corolario anterior se llaman el desarrollo del determinante por la primera columna y por la primera fila respectivamente.

Ejemplo. Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Utilizando la fórmula del desarrollo por la primera fila del Corolario 5.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^2 .\, 2.\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^5 .\, 1.\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2.\left((-1)^2 .1.\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^4 .1.\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) + \\
&\quad + (-1)\left((-1)^3 .1.\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2.(0+1) + (-1)(-1) = 3.
\end{aligned}$$

5.2 Propiedades del determinante

En esta sección estudiaremos algunas propiedades básicas de los determinantes que facilitan su cálculo.

5.2.1 Determinante de la transpuesta de una matriz

La identidad enunciada en el Corolario 5.6 nos permite deducir el siguiente resultado:

Proposición 5.7 *Sea* $A \in K^{n\times n}$. *Entonces* $\det(A) = \det(A^t)$.

Demostración. Probaremos la igualdad por inducción en n:
Para $n = 1$, no hay nada que probar.
Supongamos que vale para n y sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1)\times(n+1)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} (A^t)_{1i} \det(A^t(1|i)) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(1|i)^t) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)) = \det(A).
\end{aligned}$$ □

Observación 5.8 La definición de función multilineal alternada podría haberse dado en términos de las filas de las matrices, en lugar de respecto de las columnas, y se hubiese obtenido la misma función determinante.

5.2.2 Matrices triangulares

Un caso en el que es muy fácil calcular determinantes es el de las matrices triangulares. Lo veremos para matrices triangulares superiores, pero el mismo resultado vale para una matriz triangular inferior.

Proposición 5.9 *Sea* $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ *una matriz triangular superior. Entonces* $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Demostración. Probaremos la validez de la fórmula por inducción en n:
Para $n = 1$, no hay nada que hacer.
Supongamos que vale para n y sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ una matriz triangular superior. Entonces

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)) = a_{11} \det(A(1|1)),$$

puesto que por nuestra hipótesis sobre A, se tiene que $a_{i1} = 0$ para cada $i \geq 2$.
Ahora, la matriz $A(1|1) \in K^{n\times n}$ es triangular superior y entonces, por hipótesis inductiva, $\det(A(1|1)) = \prod\limits_{j=1}^{n} (A(1|1))_{jj} = \prod\limits_{i=2}^{n+1} a_{ii}$. En consecuencia,

$$\det(A) = a_{11} \det(A(1|1)) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii},$$

que es lo que se quería probar. □

Observación 5.10 Dado que el determinante es una función multilineal alternada por filas (ver Observación 5.8), podemos calcular el determinante de una matriz triangulándola, teniendo en cuenta el cambio del determinante de acuerdo a la operación elemental efectuada:

- $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ "*Intercambiar dos filas*" cambia el signo del determinante.

- $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \lambda F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ "*Multiplicar una fila por una constante no nula*" multiplica el determinante por esa constante.

- $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i + \lambda F_j \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ "*Sumarle a una fila un múltiplo de otra*" no modifica el determinante.

El determinante de la matriz triangular obtenida es el producto de los elementos de su diagonal.

Ejemplo. Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 3.$$

5.2.3 Desarrollo del determinante por una fila o columna

En la Sección 5.1.2 vimos una expresión que permite calcular el determinante de una matriz A por medio de una fórmula recursiva (ver Corolario 5.6) que involucra el cálculo de determinantes de submatrices de A que se obtienen al suprimir la primera columna (resp. fila) y cada una de las filas (resp. columnas) de A.
Veremos ahora fórmulas análogas para el determinante en las cuales la primera columna (o fila) de la matriz es reemplazada por cualquier otra columna o fila.

Sea $A \in K^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$. Sean $A_1, \dots, A_n$ las columnas de A. Observemos que se puede ubicar la j-ésima columna de A en el lugar de la primera, sin modificar el orden de las restantes, por medio de $j-1$ intercambios de columnas. Entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j-1}\det(\, A_j \mid A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_{j-1} \mid A_{j+1} \mid \dots \mid A_n\,) \\ &= (-1)^{j-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{ij}\,\det(A(i|j))\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\,\det(A(i|j)), \end{aligned}$$

lo que da una fórmula para el desarrollo del determinante de una matriz por la j-ésima columna para $1 \le j \le n$ arbitrario. Usando que $\det(A) = \det(A^t)$, se prueba una fórmula para el desarrollo por la i-ésima fila para cualquier $1 \le i \le n$.
Hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 5.11 *Sea* $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) && \textit{para todo } j \textit{ con } 1 \leq j \leq n \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) && \textit{para todo } i \textit{ con } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Ejemplo. Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Desarrollando el determinante por la segunda columna, se obtiene:

$$\det(A) = (-1)^{1+2}.(-2).\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y desarrollando por la tercera columna el determinante del miembro derecho,

$$\det(A) = 2.(-1)^{1+3}.1.\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.(1.1 - 2.1) = -2.$$

5.2.4 Determinante del producto de matrices

En esta sección estudiaremos cómo se comporta el determinante con respecto al producto de matrices. Para esto, probaremos en primer lugar un resultado sobre funciones multilineales alternadas que nos será de utilidad.

Proposición 5.12 *Sea* $f : K^{n\times n} \to K$ *multilineal alternada tal que* $f(I_n) = \alpha$. *Entonces* $f = \alpha.\det$.

Demostración. Como consecuencia de que $\det : K^{n\times n} \to K$ es una función multilineal alternada, se tiene que $\alpha.\det : K^{n\times n} \to K$ es multilineal alternada. Además, $(\alpha.\det)(I_n) = \alpha$.
Por la unicidad de las funciones multilineales alternadas (ver Teorema 5.4), resulta que $f = \alpha.\det$. □

Proposición 5.13 *Sean* $A, B \in K^{n\times n}$. *Entonces* $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

Demostración. Se define $f : K^{n\times n} \to K$ como $f(X) = \det(A.X)$. Nuestro objetivo es probar que para cada $B \in K^{n\times n}$ se tiene que $f(B) = \det(A).\det(B)$.
Observamos que la función f es multilineal alternada y calculamos su valor en I_n:

i) Para i con $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} & f(X_1 \mid \ldots \mid X_i + X_i' \mid \ldots \mid X_n) = \det(A.(X_1 \mid \ldots \mid X_i + X_i' \mid \ldots \mid X_n)) = \\ & \quad = \det(AX_1 \mid \ldots \mid AX_i + AX_i' \mid \ldots \mid AX_n) = \\ & \quad = \det(AX_1 \mid \ldots \mid AX_i \mid \ldots \mid AX_n) + \det(AX_1 \mid \ldots \mid AX_i' \mid \ldots \mid AX_n) = \\ & \quad = f(X_1 \mid \ldots \mid X_i \mid \ldots \mid X_n) + f(X_1 \mid \ldots \mid X_i' \mid \ldots \mid X_n). \end{aligned}$$

ii) Para $\lambda \in K$, $1 \le i \le n$,

$$f(X_1 \mid \dots \mid \lambda X_i \mid \dots \mid X_n) = \det(A.(X_1 \mid \dots \mid \lambda X_i \mid \dots \mid X_n)) =$$
$$= \det(AX_1 \mid \dots \mid A.\lambda X_i \mid \dots \mid AX_n) = \lambda \det(AX_1 \mid \dots \mid AX_i \mid \dots \mid AX_n) =$$
$$= \lambda f(X_1 \mid \dots \mid X_i \mid \dots \mid X_n).$$

iii) Para $1 \le i \le n$,

$$f(X_1 \mid \dots \mid X_i \mid \dots \mid X_i \mid \dots \mid X_n) = \det(A.(X_1 \mid \dots \mid X_i \mid \dots \mid X_i \mid \dots \mid X_n)) =$$
$$= \det(AX_1 \mid \dots \mid AX_i \mid \dots \mid AX_i \mid \dots \mid AX_n) = 0.$$

iv) $f(I_n) = \det(A.I_n) = \det(A)$.

Por la proposición anterior, resulta que $f = \det(A).\det$.
Luego, para cada $B \in K^{n\times n}$ se tiene que $\det(A.B) = f(B) = \det(A).\det(B)$. □

5.3 Determinantes y matrices inversibles

El objetivo de esta sección es estudiar la relación entre determinantes e inversibilidad de matrices. Probaremos que una matriz $A \in K^{n\times n}$ es inversible si y sólo si su determinante es no nulo. A continuación, mostraremos que los determinantes pueden ser utilizados también para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

5.3.1 Inversibilidad de matrices

El siguiente resultado, cuya demostración se basa en la fórmula para el determinante de un producto de matrices vista en la sección anterior, caracteriza la inversibilidad de matrices por medio de determinantes:

Proposición 5.14 *Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces A es inversible si y sólo si* $\det A \ne 0$.

Demostración.

(⇒) Supongamos que $A \in K^{n\times n}$ es inversible. Entonces existe una matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $A.B = I_n$. Aplicando el resultado de la Proposición 5.13 se obtiene que

$$1 = \det(I_n) = \det(A.B) = \det(A).\det(B),$$

de donde se deduce que $\det(A) \ne 0$.

(⇐) Si $\det(A) \ne 0$, entonces las columnas de A son linealmente independientes (ver Proposición 5.2) y, por lo tanto, A es inversible. □

5.3.2 Adjunta de una matriz

Dada una matriz $A \in K^{n\times n}$, podemos asociarle una matriz, cuyos elementos se calculan a partir de determinantes de submatrices de A, que en el caso en que A sea inversible nos permitirá obtener la inversa de A.

Definición 5.15 Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Se llama *adjunta de* A, y se nota $\text{adj}(A)$, a la matriz $\text{adj}(A) \in K^{n\times n}$ definida por

$$(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A(j|i)).$$

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces la adjunta de A es la matriz

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Si calculamos $A.\,\text{adj}(A)$, tenemos que

$$A.\,\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que $A^{-1} = \frac{1}{9}.\,\text{adj}(A)$. Teniendo en cuenta que $\det(A) = 9$, resulta que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.\,\text{adj}(A)$.

En el ejemplo anterior obtuvimos una relación entre la matriz A, su adjunta y su determinante. La siguiente proposición muestra que lo mismo sucede en general.

Proposición 5.16 *Sea* $A \in K^{n\times n}$. *Entonces*

$$A.\,\text{adj}(A) = \det(A).\,I_n.$$

Luego, si $\det(A) \neq 0$, *se tiene que* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.\,\text{adj}(A)$.

Demostración. Sea $A \in K^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$. Entonces

$$(A.\,\text{adj}(A))_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}.\,(\text{adj}(A))_{i\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\,(-1)^{i+\ell}\det(A(\ell|i)).$$

Si $k = \ell$, entonces $(A.\operatorname{adj}(A))_{\ell\,\ell} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+\ell}a_{\ell\,i}\det(A(\ell|i)) = \det(A)$, puesto que la sumatoria resulta ser el desarrollo de $\det(A)$ por la ℓ-ésima fila.
Por otro lado, si $k \neq \ell$, se tiene que $(A.\operatorname{adj}(A))_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+\ell}a_{ki}\det(A(\ell|i)) = 0$, puesto que se trata del desarrollo por la ℓ-ésima fila del determinante de la matriz $A^{(k\ell)}$ definida por

$$(A^{(k\ell)})_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq \ell \\ a_{kj} & \text{si } i = \ell \end{cases}$$

que tiene dos filas iguales.
La segunda parte de la proposición se deduce inmediatamente de la igualdad $A.\operatorname{adj}(A) = \det(A).I_n$. □

5.3.3 Regla de Cramer

Por último en esta sección presentaremos la regla de Cramer, que permite obtener la (única) solución de un sistema lineal no homogéneo cuya matriz asociada es inversible por medio de determinantes.

Proposición 5.17 (Regla de Cramer) *Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible, y sea $b \in K^{n\times 1}$. Entonces la (única) solución del sistema lineal $A.x = b$ está dada por*

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A} \qquad \textit{para } i = 1, \dots, n.$$

Demostración. Multiplicando la ecuación $A.x = b$ por $\operatorname{adj}(A)$, se tiene que

$$\operatorname{adj}(A).A.x = \operatorname{adj}(A).\,b.$$

Por la proposición anterior y el hecho que A es inversible, $\operatorname{adj}(A).A = A.\operatorname{adj}(A) = \det(A).\,I_n$. En consecuencia,

$$\det(A).x = \operatorname{adj}(A).\,b.$$

Sea $1 \leq i \leq n$. Entonces, de la igualdad anterior, resulta que

$$\begin{aligned} \det(A).x_i &= (\operatorname{adj}(A).\,b)_{i1} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A(j|i))\,b_j = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_j\det(A(j|i)) = \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se deduce la fórmula del enunciado de la proposición. □

La regla de Cramer en general no se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero es útil para derivar resultados teóricos sobre las soluciones de esta clase de sistemas.

Ejemplo. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\det(A) = \pm 1$ y sea $b \in \mathbb{Z}^n$. Entonces el sistema lineal $A.x = b$ tiene solución en $\mathbb{Z}^n$.

Sea $x_0 \in \mathbb{Q}^n$ la solución del sistema $A.x = b$. Por la regla de Cramer, sabemos que cada coordenada de x_0 se obtiene como el cociente entre el determinante de una matriz cuyos coeficientes son coeficientes de A y de b, y el determinante de la matriz A. Como tanto los coeficientes de A como los de b son números enteros, el determinante que aparece en cada numerador es un número entero y, puesto que $\det(A) = \pm 1$, el cociente resulta entero. Luego $x_0 \in \mathbb{Z}^n$.

5.4 Cálculo de algunos determinantes

Ejemplo. Calcular el determinante de la matriz $A \in K^{n\times n}$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Probaremos, inductivamente, que $\det(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$.

Para $n = 2$:

$$\det\begin{pmatrix} t & a_0 \\ -1 & t + a_1 \end{pmatrix} = t(t + a_1) + a_0 = t^2 + a_1 t + a_0.$$

Supongamos que vale para una matriz de este tipo en $K^{n\times n}$. Entonces, dada una matriz en $K^{(n+1)\times(n+1)}$, desarrollando el determinante por la primera fila, y aplicando luego la hipótesis inductiva resulta que

$$\det\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_n \end{pmatrix} =$$

$$= t.\det\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t + a_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+2}a_0(-1)^n =$$

$$= t.(t^n + a_n t^{n-1} + \cdots + a_1) + a_0 = t^{n+1} + a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Ejemplo. Dados $k_1, \ldots, k_n \in K$ se define la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & \ldots & k_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & \ldots & k_n^{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$

Entonces $\det(V(k_1, k_2, \ldots, k_n)) = \prod\limits_{1\le i<j\le n} (k_j - k_i)$.

Vamos a probarlo por inducción en n:
Para $n = 2$,

$$\det(V(k_1, k_2)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = k_2 - k_1,$$

y por lo tanto, la fórmula vale.
Supongamos ahora que vale para n y calculemos $\det(V(k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}))$. Se tiene que

$$\det(V(k_1, k_2, \ldots, k_{n+1})) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & \ldots & k_{n+1} \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & \ldots & k_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^n & k_2^n & \ldots & \ldots & k_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Para $i = n, n-1, \ldots, 2$ a la i-ésima fila de esta matriz le restamos k_1 veces la fila $i-1$ y obtenemos:

$$\det(V(k_1, k_2, \ldots, k_{n+1})) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 & \ldots & k_{n+1} - k_1 \\ 0 & k_2^2 - k_1 k_2 & k_3^2 - k_1 k_3 & \ldots & k_{n+1}^2 - k_1 k_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & k_2^n - k_1 k_2^{n-1} & k_3^n - k_1 k_3^{n-1} & \ldots & k_{n+1}^n - k_1 k_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 & \ldots & k_{n+1} - k_1 \\ 0 & (k_2 - k_1)k_2 & (k_3 - k_1)k_3 & \ldots & (k_{n+1} - k_1)k_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & (k_2 - k_1)k_2^{n-1} & (k_3 - k_1)k_3^{n-1} & \ldots & (k_{n+1} - k_1)k_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1}(k_j - k_1).\ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_2 & k_3 & \ldots & k_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_2^{n-1} & k_3^{n-1} & \ldots & k_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1}(k_j - k_1) \,.\, \prod_{2\le i<j\le n+1}(k_j - k_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n+1}(k_j - k_i).$$

Observación 5.18 Del ejemplo anterior se deduce que, si $k_1, \dots, k_n \in K$ son escalares distintos, la matriz $V(k_1, \dots, k_n) \in K^{n\times n}$ es inversible, pues su determinante es no nulo.

La matriz de Vandermonde se relaciona con el siguiente problema de interpolación: dados $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ escalares *distintos*, y $\beta_0, \dots, \beta_n \in K$ escalares arbitrarios, hallar un polinomio $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ de grado menor o igual que n tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para cada $0 \le i \le n$. Estas condiciones dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de P:

$$(V(\alpha_0, \dots, \alpha_n))^t.x = \beta^t,$$

donde x_i $(0 \le i \le n)$ representa el coeficiente de X^i en P y $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in K^{n+1}$.
Ahora, siendo $(V(\alpha_0, \dots, \alpha_n))^t$ una matriz inversible (por ser $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ escalares distintos), este sistema tiene solución única $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$, y el polinomio $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ cuyos coeficientes son las coordenadas de esta solución resulta ser el único polinomio de grado menor o igual que n que satisface $P(\alpha_i) = \beta_i$ para cada $0 \le i \le n$ (polinomio interpolador de Lagrange).

5.5 Rango de una matriz y determinante

De acuerdo a lo que hemos visto previamente, para decidir si una matriz es inversible, basta verificar si su determinante es no nulo. En esta sección veremos que, aún en el caso de una matriz A no inversible, es posible determinar el rango de A calculando determinantes de submatrices de A.

Definición 5.19 Sea $A \in K^{n\times m}$ y sean $1 \le r \le n, 1 \le s \le m$, Una *submatriz de A en $K^{r\times s}$* es una matriz $B \in K^{r\times s}$ que se obtiene suprimiendo $n - r$ filas y $m - s$ columnas de A.

Ejemplo. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- Una submatriz de A de 2×3 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, que se obtiene al suprimir la primera fila de A.
- Una submatriz de A de 2×2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, que se obtiene al suprimir la tercera fila y la segunda columna de A.

La relación entre rango y submatrices con determinante no nulo viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 5.20 *Sea $A \in K^{n\times m}$. Son equivalentes:*

i) $\text{rg}(A) \geq r$.

ii) Existe $B \in K^{r\times r}$ submatriz de A con $\det(B) \neq 0$.

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Si $\text{rg}(A) \geq r$, entonces existen r filas $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ ($i_1 < \dots < i_r$) de A que son linealmente independientes. Consideramos la submatriz A' de A formada por dichas filas. Se tiene que $A' \in K^{r\times m}$ y $\text{rg}(A') = r$. Esto último implica que A' tiene r columnas $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$ ($j_1 < \dots < j_r$) linealmente independientes.

Sea $B \in K^{r\times r}$ la submatriz de A' cuyas columnas son $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$. Es claro que B es una submatriz de A y, como sus columnas son linealmente independientes, $\det(B) \neq 0$.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que $B \in K^{r\times r}$ es una submatriz de A con determinante no nulo. Entonces, las columnas de B son linealmente independientes.

Consideremos la submatriz $A' \in K^{r\times m}$ de A que resulta de suprimir las mismas filas que para obtener B (pero sin suprimir ninguna columna). Entonces las columnas de B son algunas de las columnas de A', con lo que $\text{rg}(A') \geq \text{rg}(B) = r$.

Finalmente, observemos que las filas de A son algunas de las filas de A', de donde $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(A') \geq r$. □

De esta proposición se desprende el siguiente resultado que permite obtener el rango de una matriz estudiando los rangos de sus submatrices cuadradas.

Observación 5.21 Sea $A \in K^{n\times m}$ una matriz que posee una submatriz de $r\times r$ inversible, pero no posee ninguna submatriz de $(r + 1) \times (r + 1)$ inversible. Entonces $\text{rg}(A) = r$.

5.6 Otra fórmula para el determinante

Concluimos este capítulo dando una fórmula alternativa para el determinante.

Dada $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$, usando que el determinante es una función multilineal alternada por filas tenemos que

$$\det(A) = \sum_{1\leq i_1\leq n} a_{1i_1} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

donde e_{i_1} es el i_1-ésimo vector de la base canónica de K^n. Repitiendo el procedimento para todas las filas tenemos que

$$\det(A) = \sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_n\le n} a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Dado que, si una matriz tiene dos filas iguales, su determinante es cero, en la suma podemos quedarnos sólo con los determinantes de las matrices cuyas filas son los n vectores distintos de la base canónica, eventualmente cambiados de orden. Para facilitar la notación, daremos la siguiente

Definición 5.22 Sea $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Una *permutación* de I_n es una función $\sigma : I_n \to I_n$ biyectiva. El conjunto de todas las permutaciones de I_n se nota S_n.

Luego,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ sólo depende de la permutación σ y siempre da 1 o -1 (ya que la matriz se obtiene intercambiando filas de la matriz I_n), podemos definir el *signo de la permutación* σ (que notaremos sg(σ)) como dicho determinante. Usando esta notación, tenemos:

Proposición 5.23 *Sea* $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. *Entonces*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}.$$

Observación 5.24 Para calcular el signo de una permutación $\sigma \in S_n$ basta considerar la matriz $\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ y contar cuántos intercambios de filas se deben realizar para conseguir la matriz I_n. Si el número de intercambios es r, el signo de la permutación será $(-1)^r$.

Nota La definición de signo de una permutación puede darse independientemente de la definición de determinante. De esta forma, la identidad de la Proposición 5.23 nos da una función de $K^{n\times n}$ en K que puede probarse que es multilineal alternada y que en la identidad vale 1 y por lo tanto es la función determinante. Esto nos daría una definición no inductiva del determinante que no depende de nuestra definición anterior.