Capítulo 1

Espacios vectoriales

En diversos conjuntos conocidos, por ejemplo los de vectores en el plano o en el espacio ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$), o también el de los polinomios ($\mathbb{R}[X]$), sabemos sumar sus elementos y multiplicarlos por números. Todos estos conjuntos comparten una cierta “estructura”, que está dada por esa suma y ese producto, a la que llamaremos espacio vectorial. En este capítulo presentaremos la noción de espacio vectorial y estudiaremos algunas propiedades básicas que poseen los conjuntos con dicha estructura.

1.1 Espacios vectoriales y subespacios

1.1.1 Preliminares

La noción de espacio vectorial requiere de dos conjuntos: un conjunto K (los escalares) y otro conjunto V (los vectores). Estos dos conjuntos deben satisfacer ciertas propiedades, que esencialmente se refieren a que los elementos de V se puedan sumar entre sí y multiplicar por elementos de K.
Comenzaremos dando algunas definiciones previas para poder después presentar la definición precisa de espacio vectorial.

Definición 1.1 Sea A un conjunto no vacío. Una *operación* (o *ley de composición interna* u *operación binaria*) de A es una función $* : A \times A \to A$.

Notación. $*(a, b) = c$ se escribe $a * b = c$.

Ejemplos.

- $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $+(a, b) = a + b$, es una operación de $\mathbb{N}$.
- Como la resta, $-(a, b) = a - b$, no es una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, entonces no es una operación de $\mathbb{N}$.
- La suma $+$, el producto $\cdot$ y la resta $-$ son operaciones de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

No nos interesaremos por operaciones cualesquiera, sino que trabajaremos con operaciones que posean algunas propiedades. Entre las propiedades que analizaremos se encuentran las siguientes:

Definición 1.2 (Propiedades básicas) Sea $* : A \times A \to A$ una operación.

i) $*$ se dice *asociativa* si $(a * b) * c = a * (b * c) \ \ \forall\, a, b, c \in A$.

ii) Se dice que $*$ tiene *elemento neutro* si $\exists\, e \in A$ tal que $e * a = a * e = a$ para cada $a \in A$.

iii) Si $*$ tiene elemento neutro e, se dice que todo elemento tiene *inverso* para $*$ si $\forall\, a \in A$, $\exists\, a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

iv) $*$ se dice *conmutativa* si $a * b = b * a \ \ \forall\, a, b \in A$.

Se pueden estudiar las características que comparten los conjuntos con una operación que satisface algunas de estas propiedades. Una noción útil es la de grupo, que definimos a continuación.

Definición 1.3 Sea A un conjunto, y sea $*$ una operación en A que satisface las propiedades i), ii) y iii) de la definición anterior. Entonces $(A, *)$ se llama un *grupo*. Si además $*$ cumple iv), se dice que $(A, *)$ es un *grupo abeliano* o *conmutativo*.

Ejemplos.

- $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo: se puede probar que no tiene elemento neutro.
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es un grupo: se puede probar que sólo 1 y -1 tienen inverso multiplicativo.
- $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ y $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos.
- $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $* = \circ$ (composición de funciones). Entonces $(A, *)$ no es un grupo: las únicas funciones con inversa para $\circ$ son las biyectivas.
- $S_{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es biyectiva }\}$, $* = \circ$. Entonces $(S_{\mathbb{R}}, \circ)$ es un grupo.
- C un conjunto, $\mathcal{P}(C) = \{S \subseteq C\}$. Se define la operación $\triangle : \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$, llamada diferencia simétrica, de la siguiente forma:

  $$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

  Entonces $(\mathcal{P}(C), \triangle)$ es un grupo abeliano.

A partir de la definición de grupo pueden probarse propiedades que poseen todos los conjuntos con esa estructura. Por ejemplo:

- *Sea $(G, *)$ un grupo. Entonces existe un único elemento neutro para $*$.*

  Supongamos que hay dos: e y e'. Entonces

  $$\begin{aligned} e * a = a * e = a \quad \forall\, a \in G \ &\Rightarrow\ e * e' = e' * e = e' \\ e' * a = a * e' = a \quad \forall\, a \in G \ &\Rightarrow\ e' * e = e * e' = e \end{aligned}$$

  Luego, $e = e'$.

- *Sea* $(G, *)$ *un grupo. Entonces para cada* $a \in G$ *existe un único inverso para* a.

  Sea e el elemento neutro de $(G, *)$. Supongamos que b y c son inversos de a. Entonces

$$b = e * b = (c * a) * b = c * (a * b) = c * e = c.$$

Notación. Si G es un grupo abeliano y la operación se nota $+$, el elemento neutro se notará 0 y, para cada $a \in G$, el inverso de a se notará $-a$.

La siguiente definición que daremos se refiere a conjuntos en los cuales hay dos operaciones relacionadas entre sí.

Definición 1.4 Sea A un conjunto y sean $+$ y $\cdot$ operaciones de A. Se dice que $(A, +, \cdot)$ es un *anillo* si

i) $(A, +)$ es un grupo abeliano

ii) $\cdot$ es asociativa y tiene elemento neutro

iii) Valen las propiedades distributivas: Para $a, b, c \in A$,

  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  - $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Además, si $\cdot$ es conmutativa, se dice que $(A, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo.*

Notación. Cuando quede claro cuáles son las operaciones $+$ y $\cdot$, para referirnos al anillo $(A, +, \cdot)$, escribiremos simplemente A. Al elemento neutro del producto se lo notará 1.

Ejemplos.

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son anillos conmutativos.

- $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es una anillo conmutativo.

- Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, entonces $(A[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con las operaciones usuales de polinomios.

- Si C es un conjunto, $(\mathcal{P}(C), \triangle, \cap)$ es un anillo conmutativo.

- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ con las operaciones usuales de suma y producto de funciones es un anillo conmutativo.

Al igual que en el caso de los grupos, también pueden probarse propiedades que poseen todos los anillos:

- *Sea* $(A, +, \cdot)$ *un anillo, y sea* 0 *el elemento neutro de* $+$. *Entonces* $0 \cdot a = 0$, $\forall\, a \in A$.

  Se tiene que
  $$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$
  Si b es el inverso aditivo de $0 \cdot a$, resulta
  $$0 = 0 \cdot a + b = (0 \cdot a + 0 \cdot a) + b = 0 \cdot a + (0 \cdot a + b) = 0 \cdot a.$$
  Luego, $0 \cdot a = 0$.

En un anillo cualquiera no es cierto que $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_4$, se tiene que $2 \cdot 2 = 0$, pero $2 \neq 0$.
Consideraremos ahora los anillos que cumplen esta propiedad.

Definición 1.5 Un anillo conmutativo $(A, +, \cdot)$ se llama un *dominio de integridad* si $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$ *o* $b = 0$.

Ejemplos.

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son dominios de integridad.
- Si A es un dominio de integridad, entonces $A[X]$ es un dominio de integridad.
- Z_p es un dominio de integridad $\iff$ p es primo.

La siguiente definición resume las propiedades que debe satisfacer uno de los conjuntos involucrados en la definición de un espacio vectorial.

Definición 1.6 Sea K un conjunto, y sean $+$ y $\cdot$ operaciones de K. Se dice que $(K, +, \cdot)$ es un *cuerpo* si $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y todo elemento no nulo de K tiene inverso multiplicativo. Es decir:

i) $(K, +)$ es un grupo abeliano,

ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y

iii) vale la propiedad distributiva de $\cdot$ con respecto a $+$.

Ejemplos.

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son cuerpos
- $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ es un cuerpo $\iff$ p es primo.

- Se define $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i(\sqrt{2})^i \,/\, a_i \in \mathbb{Q},\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Veamos que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ es un cuerpo.

  Usando que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$, se puede probar fácilmente que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

  Observamos que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $(\sqrt{2})^{2k} = 2^k$ y $(\sqrt{2})^{2k+1} = 2^k\sqrt{2}$ y entonces, todo elemento de la forma $\sum_{i=0}^{n} a_i(\sqrt{2})^i$ con $a_i \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}_0$ puede escribirse como $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. Recíprocamente, es claro que todo elemento de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ pertenece a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

  Veamos ahora que todo elemento no nulo tiene inverso.

  Sea $a + b\sqrt{2} \neq 0$. Entonces $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \neq 0$ (pues $a, b \in \mathbb{Q}$), de donde
  $$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

También en el caso de los cuerpos se pueden probar propiedades generales. Por ejemplo:

- *Todo cuerpo $(K, +, \cdot)$ es un dominio de integridad.*

  Tenemos que probar que $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$. Supongamos que $a \cdot b = 0$. Si $a = 0$, ya está. Si $a \neq 0$, entonces existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Entonces
  $$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \;\Rightarrow\; (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; 1 \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; b = 0.$$

Para poder completar la definición de espacio vectorial necesitamos definir una clase especial de funciones que se aplican a elementos de dos conjuntos distintos:

Definición 1.7 Sean A y B dos conjuntos. Una *acción* de A en B es una función $\cdot : A \times B \to B$.
Notación: $\cdot\,(a, b) = a \cdot b$

Estamos ahora en condiciones de dar la definición de espacio vectorial.

1.1.2 Espacios vectoriales

Definición 1.8 Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Sea V un conjunto no vacío, sea $+$ una operación en V y sea $\cdot$ una acción de K en V. Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un K-*espacio vectorial* si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

ii) La acción $\cdot : K \times V \to V$ satisface

  (a) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad \forall\, a \in K;\ \forall\, v, w \in V.$

(b) $(a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v \quad \forall\, a,b \in K;\ \forall\, v \in V$.

(c) $1\cdot v = v \quad \forall\, v \in V$.

(d) $(a\cdot b)\cdot v = a\cdot (b\cdot v) \quad \forall\, a,b \in K;\ \forall\, v \in V$.

Los elementos de V se llaman *vectores* y los elementos de K se llaman *escalares*. La acción $\cdot$ se llama *producto por escalares*.
Nótese que el símbolo $\cdot$ se usa tanto para la acción de K en V como para el producto en K, pero esto no generará confusión puesto que en el primer caso estará aplicado a un elemento de K y otro de V, mientras que en el segundo, a dos elementos de K.

En lo que sigue, K denotará un cuerpo. Si $(V, +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial y la operación $+$ de V y la acción $\cdot$ de K en V quedan claras del contexto, diremos simplemente que V es un K-espacio vectorial.

Hay muchas propiedades que se cumplen en cualquier espacio vectorial. A continuación mostramos algunas de ellas.

Sea V un K-espacio vectorial. Entonces:

1. *$0\cdot v = 0$ para todo $v \in V$. (Observar que el elemento 0 que aparece en el miembro izquierdo de la igualdad es el elemento neutro de K, mientras que el de la derecha es el vector $0 \in V$.)*

2. *$(-1)\cdot v = -v$ para todo $v \in V$. (Recuérdese que $-v$ denota al inverso aditivo de v).*

Demostración.

1. Se tiene que
$$0\cdot v = (0+0)\cdot v = 0\cdot v + 0\cdot v.$$
Sea w el inverso aditivo de $0\cdot v$. Entonces
$$0 = 0\cdot v + w = (0\cdot v + 0\cdot v) + w = 0\cdot v + (0\cdot v + w) = 0\cdot v + 0 = 0\cdot v$$

2. Vemos que
$$v + (-1)\cdot v = (-1)\cdot v + v = (-1)\cdot v + 1\cdot v = (-1+1)\cdot v = 0\cdot v = 0.$$
Luego, $(-1)\cdot v$ es el inverso aditivo de v, es decir $(-1)\cdot v = -v$.

Ejemplos. En lo que sigue K es un cuerpo.

1. K es un K-espacio vectorial.

2. Sea $K^n = \{(x_1,\dots,x_n) \,/\, x_i \in K\}$. Se definen
$$+ \ :\ K^n \times K^n \to K^n, \quad (x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$\cdot \ :\ K \times K^n \to K^n, \quad \lambda\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$
Entonces K^n es un K-espacio vectorial.

3. Una matriz de n filas y m columnas es un arreglo de $n \times m$ números ubicados en n filas y m columnas.

   Sea $K^{n\times m} = \{A \ / \ A$ es una matriz de n filas y m columnas de elementos en $K\}$. Observamos que un elemento A de $K^{n\times m}$ es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}.$$

   Si $A \in K^{n\times m}$, denotaremos por A_{ij} al elemento ubicado en la intersección de la fila i y la columna j de A.

   Se definen
   $+ \ : \ K^{n\times m} \times K^{n\times m} \to K^{n\times m}, \ (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$
   $\cdot \ : \ K \times K^{n\times m} \to K^{n\times m}, \ (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} \quad (1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$

   Entonces $K^{n\times m}$ es un K-espacio vectorial.

4. Sea Z un conjunto no vacío. Se considera $K^Z = \{f : Z \to K \,/\, f$ es función $\}$ y se definen
   $+ \ : \ K^Z \times K^Z \to K^Z, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in Z,$
   $\cdot \ : \ K \times K^Z \to K^Z, \ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall\, x \in Z.$

   Entonces K^Z es un K-espacio vectorial.

5. $K[X]$, el conjunto de polinomios en la variable X a coeficientes en K, es un K-espacio vectorial con la suma usual de polinomios y la multiplicación usual de polinomios por una constante.

6. $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial; $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

7. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

1.1.3 Subespacios

Dentro de un K-espacio vectorial V, hay subconjuntos que heredan la estructura de V, es decir, que son también espacios vectoriales con la misma operación y la misma acción que V. En esta sección, comenzaremos el estudio de los subconjuntos con esta propiedad.

Definición 1.9 Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto $S \subseteq V$ no vacío se dice un *subespacio de* V si la suma y el producto por escalares (de V) son una operación y una acción en S que lo convierten en un K-espacio vectorial.

Ejemplo. Caractericemos todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$:

- $S = \{(0,0)\}$ es un subespacio.
- Supongamos que S es un subespacio y que contiene algún elemento v no nulo. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.v \in S$. Si éstos son todos los elementos de S, entonces S es un subespacio (que resulta ser una recta que pasa por el origen).

- Con la notación del punto anterior, si S contiene algún elemento que no es de la forma $\lambda.v$, digamos v', contiene también a todos los múltiplos de v'. Luego, S contiene a las dos rectas L y L' que pasan por el origen y cuyas direcciones son v y v' respectivamente. Es claro (usando la regla del paralelogramo) que cualquier punto en $\mathbb{R}^2$ es suma de un elemento de L más uno de L', luego pertenece a S. En consecuencia, $S = \mathbb{R}^2$.

Observamos que, dado un K-espacio vectorial V y un subconjunto S de V, para determinar si S es un subespacio de V según la Definición 1.9 debemos verificar la validez de una gran cantidad de propiedades (todas las involucradas en la definición de espacio vectorial). La siguiente proposición nos provee una caracterización de los subespacios en términos de sólo tres propiedades, a partir de las cuales se deducen todas las demás.

Proposición 1.10 *Sea V un K-espacio vectorial y sea $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V si y sólo si valen las siguientes condiciones:*

i) $0 \in S$

ii) $v, w \in S \Longrightarrow v + w \in S$

iii) $\lambda \in K, v \in S \Longrightarrow \lambda \cdot v \in S$

Demostración.

($\Rightarrow$) Es inmediato verificar que si S es un subespacio de V se cumplen i), ii) e iii).

($\Leftarrow$) La condición i) asegura que S es no vacío.

Por ii), $+$ es una operación de S y por iii), $\cdot$ es una acción.

La asociatividad y conmutatividad de la suma se deducen de la validez de las mismas para V, el elemento neutro de la suma $0 \in S$ por i), y la existencia de inverso aditivo se deduce de que dado $v \in S$, $-v = (-1) \cdot v$, que pertenece a S por iii).

Las propiedades de la acción en la definición de espacio vectorial se deducen también de su validez en V. □

Observamos que la condición i) en la proposición anterior puede ser reemplazada por

i') $S \neq \emptyset$.

La demostración de este hecho queda como ejercicio.

Ejemplos. Sea V un K-espacio vectorial.

1. $\{0\}$ es un subespacio de V.
2. V es un subespacio de V.
3. Si $v \in V$, $S = \{\lambda \cdot v \,/\, \lambda \in K\}$ es un subespacio de V:

   i) $0 = 0 \cdot v \in S$.

   ii) Si $\lambda \cdot v$, $\mu \cdot v \in S$, entonces $\lambda \cdot v + \mu \cdot v = (\lambda + \mu) \cdot v \in S$.

iii) Si $\lambda \cdot v \in S$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha \cdot (\lambda \cdot v) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot v \in S$.

Este subespacio se denomina el *subespacio generado por* v y se nota $S = < v >$.

4. Sean $v_1, \ldots, v_n \in V$.

   Entonces $S = \{\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n : \alpha_i \in K,\ 1 \leq i \leq n\}$ es un subespacio de V:

   i) $0 = 0.v_1 + \cdots + 0.v_n \in S$.

   ii) Si $v, w \in S$, $v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n$, $w = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_n.v_n$, entonces $v + w = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in S$.

   iii) Si $\lambda \in K$ y $v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n \in S$, entonces $\lambda.v = (\lambda.\alpha_1).v_1 + \cdots + (\lambda.\alpha_n).v_n \in S$.

   El subespacio S que hemos definido se llama el *subespacio generado por* $v_1, \ldots, v_n$ y se nota $S = < v_1, \ldots, v_n >$.

Si V es un K-espacio vectorial, tiene sentido considerar las operaciones de unión e intersección entre subespacios de V (que son subconjuntos de V). Una pregunta que surge es si estas operaciones preservan la estructura de subespacio. Como veremos a continuación, esto vale en el caso de la intersección de subespacios, pero no para la unión.

Proposición 1.11 *Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Entonces $S \cap T$ es un subespacio de V.*

Demostración.

i) $0 \in S \cap T$ puesto que $0 \in S$ y $0 \in T$.

ii) Sean $v, w \in S \cap T$. Entonces $v \in S$, $v \in T$, $w \in S$ y $w \in T$. Como $v, w \in S$ y S es un subespacio, entonces $v + w \in S$. Análogamente, $v + w \in T$. Luego, $v + w \in S \cap T$.

iii) Sean $\lambda \in K$ y $v \in S \cap T$. Entonces $v \in S$ y $v \in T$. Como $\lambda \in K$, $v \in S$ y S es un subespacio, entonces $\lambda \cdot v \in S$. Análogamente, $\lambda \cdot v \in T$. Luego, $\lambda \cdot v \in S \cap T$. □

En forma análoga a lo hecho en la demostración de la proposición anterior, se prueba que la intersección de cualquier familia de subespacios de un K-espacio vectorial V es un subespacio de V.

Observación 1.12 Si V es un K-espacio vectorial, S y T subespacios de V, entonces $S \cup T$ no es necesariamente un subespacio de V.

En efecto, consideremos en $\mathbb{R}^2$ los subespacios

$$S = \{\lambda(1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad T = \{\lambda(0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que $(1, 0) \in S$, $(0, 1) \in T$, luego ambos pertenecen a $S \cup T$. Pero $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S \cup T$, puesto que $(1, 1) \notin S$ y $(1, 1) \notin T$.

Concluimos esta sección exhibiendo algunos ejemplos de subespacios de distintos K-espacios vectoriales.

Ejemplos.

1. Sean $a_1, \dots, a_n \in K$ fijos. Sea $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0\}$. Es fácil verificar que S es un subespacio de K^n.

2. $S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \right\}$ es un subespacio de K^n, pues $S = \bigcap\limits_{i=1}^{m} S_i$, donde $S_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0\}$ $(1 \le i \le m)$ y cada S_i es un subespacio de K^n.

3. Sean $V = K[X]$ y $n \in \mathbb{N}$ fijo. Se tiene que $K_n[X] = \{f \in K[X] : f = 0 \text{ o } \operatorname{gr}(f) \le n\}$ es un subespacio de V:

   i) $0 \in K_n[X]$.

   ii) Sean $f, g \in K_n[X]$. Si $f = 0$ o $g = 0$ es claro que $f + g \in S$. Si $f + g = 0$, entonces $f + g \in S$. Si no, $\operatorname{gr}(f + g) \le \max(\operatorname{gr}(f), \operatorname{gr}(g)) \le n$, y por lo tanto $f + g \in S$.

   iii) Sean $\lambda \in K$ y $f \in K_n[X]$. Si $\lambda = 0$ o $f = 0$, entonces $\lambda.f = 0 \in K_n[X]$. Si no, $\operatorname{gr}(\lambda.f) = \operatorname{gr}(f)$, de donde $\lambda.f \in K_n[X]$.

   Observar que el conjunto $\{f \in K[X] : f = 0 \text{ o } \operatorname{gr}(f) \ge n\}$, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, no es un subespacio de $K[X]$. Por ejemplo: $f = X^n$ y $g = -X^n + 1$ pertenecen a dicho conjunto, pero $f + g = 1$ no.

1.1.4 Sistemas de generadores

El objetivo de esta sección es mostrar cómo pueden describirse todos los elementos de un K-espacio vectorial V a partir de ciertos subconjuntos de elementos de V.
De la definición de K-espacio vectorial vemos que una forma de obtener nuevos elementos de V a partir de los elementos de un subconjunto $G \subseteq V$ es considerando sumas finitas de múltiplos por escalares de elementos de G. Surge entonces la noción de combinación lineal:

Definición 1.13 Sea V un K-espacio vectorial, y sea $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$. Una *combinación lineal de* G es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i.v_i$ con $\alpha_i \in K$ para cada $1 \le i \le r$.

Ejemplos.

1. Sea $G = \{(1, 2), (3, 4)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Una combinación lineal de G es un vector $v = \alpha.(1, 2) + \beta.(3, 4)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Sea $G = \{1, X, \dots, X^n\} \subseteq \mathbb{R}_n[X]$. Una combinación lineal de G es $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para cada $0 \le i \le n$.

La definición de combinación lineal se extiende al caso de subconjuntos no necesariamente finitos del espacio vectorial considerado:

Definición 1.14 Sea V un K-espacio vectorial, sea I un conjunto de índices y sea $G = \{v_i \,/\, i \in I\} \subset V$. Una *combinación lineal de* G es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i.v_i$ donde $\alpha_i = 0$ salvo para finitos $i \in I$.

Ejemplos.

1. Sea $G = \{X^i \,/\, i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{R}[X]$. Una combinación lineal de G es $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i X^i$ donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i = 0$ salvo para finitos valores de $i \in \mathbb{N}_0$.
2. Sea $G = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Una combinación lineal de G es $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \beta_\alpha.(\alpha, 0)$ tal que $\beta_\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta_\alpha = 0$ salvo para finitos $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dado un espacio vectorial V, considerando las combinaciones lineales de los elementos de ciertos subconjuntos de V, podemos obtener cualquier elemento del espacio vectorial en cuestión. Como se verá en los ejemplos, en muchos casos esto nos permitirá describir conjuntos infinitos (como por ejemplo $\mathbb{R}^2$) utilizando finitos elementos del espacio.

Definición 1.15 Sea V un K-espacio vectorial y sea $G \subseteq V$. Se dice que G es un *sistema de generadores de* V (y se nota $< G > = V$) si todo elemento de V es una combinación lineal de G.

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}^2 = < (1, 0), (0, 1) >$, pues $\forall\, x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x = \alpha.(1, 0) + \beta.(0, 1)$.
2. $K^n = < (1, 0 \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1) >$.
3. $K^{n\times m} = < E^{ij} >_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ donde $(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
4. $K[X] = < X^i >_{i\in\mathbb{N}_0}$.
5. Si $G \subseteq K[X]$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}_0$, existe $f_i \in G$ con $\mathrm{gr}(f_i) = i$, entonces $K[X] = < G >$.

   Es claro que $0 \in < G >$. Veamos, por inducción en $\mathrm{gr}(g)$, que $g \in < G >$ para cada $g \in K[X]$:

   Si $\mathrm{gr}(g) = 0$, entonces $g \in K$, y como existe $f_0 \in G$ con $\mathrm{gr}(f_0) = 0$ (es decir, $f_0 \in K - \{0\}$), se tiene que $g = \dfrac{g}{f_0}.f_0 \in < G >$.

   Sea $n > 0$ y supongamos que todo polinomio de grado menor que n y el polinomio nulo pertenecen a $< G >$. Sea $g \in K[X]$ con $\mathrm{gr}(g) = n$. Por hipótesis, existe $f_n \in G$ con $\mathrm{gr}(f_n) = n$. Si $g = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j X^j$ y $f_n = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j X^j$, consideramos $\widetilde{g} = g - \frac{a_n}{b_n} f_n$.

Observamos que $\widetilde{g} = 0$ o $\text{gr}(\widetilde{g}) < n$. Por hipótesis inductiva, $\widetilde{g} \in \, < G >$, es decir $\widetilde{g} = \sum\limits_{f \in G} c_f.f$ con $c_f = 0$ salvo para finitos f. En consecuencia,

$$g = \widetilde{g} + \frac{a_n}{b_n} f_n = \sum_{f \in G,\, f \neq f_n} c_f.f + \Big(c_{f_n} + \frac{a_n}{b_n} \Big) f_n \ \in \ < G >.$$

1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Hemos visto que un conjunto del tipo

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in K^m : \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{array} \right. \right\}$$

es un subespacio de K^m. Surge entonces la cuestión de describir estos conjuntos. Esto puede hacerse, por ejemplo, encontrando un sistema de generadores del subespacio S. Más en general, estudiaremos el problema de dar una descripción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

donde $a_{ij} \in K$ para todo $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$, y $b_i \in K$ para todo $1 \le i \le n$, a los que llamaremos sistemas de n ecuaciones lineales en m incógnitas.

1.2.1 Sistemas lineales homogéneos

Un primer tipo de sistemas de ecuaciones que estudiaremos son los que tienen todas las ecuaciones igualadas a 0.

Definición 1.16 Un *sistema lineal homogéneo* de n ecuaciones con m incógnitas a coeficientes en un cuerpo K es un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{array} \right.$$

donde $a_{ij} \in K$ para cada $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Notación. La matriz $A \in K^{n \times m}$ definida por $A_{ij} = a_{ij}$ se llama la *matriz asociada al sistema.*

Observación 1.17 El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo con m incógnitas es un subespacio de K^m (ver ejemplo 2 en la página 10).

Resolver un sistema de este tipo significará dar un sistema de generadores para el subespacio de las soluciones.

El método que daremos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en transformar el sistema dado, por medio de ciertas operaciones, en otro que tenga el mismo conjunto de soluciones, pero cuya resolución sea más simple. Aparece entonces la noción de sistemas equivalentes:

Definición 1.18 Dos sistemas lineales homogéneos se dicen *equivalentes* si sus conjuntos de soluciones son iguales.

Ejemplo. Los siguientes sistemas lineales homogéneos a coeficientes en $\mathbb{R}$ son equivalentes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right. \qquad\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

1.2.2 Método de triangulación

Algunos sistemas de ecuaciones lineales son muy fáciles de resolver:

Ejemplo. Consideremos el siguiente sistema lineal homogéneo en $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tiene como única solución a $(0,0,0)$: De la tercera ecuación, resulta que $x_3 = 0$. Teniendo en cuenta que $x_3 = 0$, de la segunda ecuación se deduce que $x_2 = 0$. Finalmente, reemplazando $x_2 = x_3 = 0$ en la primera ecuación, se obtiene que $x_1 = 0$.

Análogamente, será más fácil obtener las soluciones de cualquier sistema lineal que se encuentre en esta forma "triangular", es decir, de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \cdots + a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{nn}x_n + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{array}\right.$$

La idea de lo que sigue es ver cómo puede obtenerse, dado un sistema lineal arbitrario, un sistema de este tipo equivalente al dado.

La siguiente proposición caracteriza ciertas operaciones que producen sistemas equivalentes. En estas operaciones se basa el método de eliminación de Gauss (o método de triangulación) que utilizaremos para resolver sistemas lineales.

Proposición 1.19 *Dado un sistema lineal homogéneo de ecuaciones, los siguientes cambios en las ecuaciones dan lugar a sistemas equivalentes:*

1. *Intercambiar dos ecuaciones de lugar.*

2. Multiplicar una ecuación por una constante no nula.

3. Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra.

Demostración.

1. Si vemos al conjunto de soluciones del sistema como la itersección de los conjuntos de soluciones de cada una de las ecuaciones que lo integran, intercambiar dos ecuaciones corresponde a intercambiar dos conjuntos en la intersección. Como la intersección es conmutativa, el conjunto que resulta es el mismo.

2. Sea $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$ una solución de

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{array} \right.$$

Al multiplicar la i-ésima ecuación por $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, resulta el sistema

$$(**) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \cdots + \lambda a_{im}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{array} \right.$$

Es claro que x es solución de todas las ecuaciones que no fueron modificadas. Además

$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \cdots + \lambda a_{im}x_m = \lambda(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m) = \lambda.\, 0 = 0.$$

Luego, x es solución de $(**)$.

Recíprocamente, multiplicando la i-ésima ecuación de $(**)$ por $\frac{1}{\lambda}$ se obtiene $(*)$, de donde, con el mismo razonamiento que antes, se deduce que si x es solución de $(**)$ también lo es de $(*)$.

3. Se demuestra en forma análoga. □

Observación 1.20 Si A es la matriz asociada a un sistema lineal homogéneo H, efectuar las operaciones de la proposición anterior sobre las ecuaciones de H equivale a hacerlo sobre las filas de A.

Como consecuencia de esta observación, para resolver un sistema lineal trabajaremos con la matriz asociada al sistema, en lugar de hacerlo con las ecuaciones. Al aplicar en las matrices las operaciones dadas en la Proposición 1.19 estaremos obteniendo matrices cuyos sistemas lineales asociados son equivalentes al original.
El siguiente Teorema nos asegura que, por medio de las operaciones permitidas siempre puede obtenerse un sistema triangular equivalente al dado. Más aún, de la demostración se desprende un algoritmo para realizar esta tarea.

Teorema 1.21 *Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Entonces, aplicando los cambios descriptos en la Proposición 1.19, puede obtenerse un sistema lineal homogéneo H' cuya matriz B es triangular superior, es decir, tal que $B_{ij} = 0$ si $i > j$.*

Demostración. Procedemos por inducción en n, la cantidad de ecuaciones del sistema.
Si $n = 1$ no hay nada que probar.
Supongamos que vale para n y consideremos un sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \\ a_{n+1\,1}x_1 + \cdots + a_{n+1m}x_m & = & 0 \end{cases}$$

Si $m = 1$, es claro que el resultado vale. Supongamos $m > 1$.
Primer caso: Si $a_{i1} = 0$ para cada $1 \le i \le n + 1$. Entonces la matriz del sistema es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ \bar{0} & M \end{pmatrix}$$

donde $\bar{0}$ denota una columna de ceros y $c \in K^{1\times(m-1)}$, $M \in K^{n\times(m-1)}$.
Segundo caso: Existe j, $1 \le j \le n + 1$, con $a_{1j} \ne 0$. Eventualmente intercambiando las ecuaciones 1 y j, podemos suponer que $a_{11} \ne 0$. Multiplicando la primera ecuación por $\frac{1}{a_{11}}$ y aplicando operaciones de tipo 3. en las otras resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1m}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,m} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_i - a_{i1}F_1} \begin{pmatrix} 1 & c \\ \bar{0} & M \end{pmatrix}$$

con $c \in K^{1\times(m-1)}$ y $M \in K^{n\times(m-1)}$.
Entonces, en cualquier caso, aplicando las operaciones descriptas en la Proposición 1.19 al sistema dado, puede obtenerse un sistema cuya matriz asociada es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ \bar{0} & M \end{pmatrix} \quad \text{con } M \in K^{n\times(m-1)} \ \text{ y } \ a = 1 \text{ ó } a = 0.$$

Sea H_M el sistema cuya matriz asociada es M. Por hipótesis inductiva, aplicando operaciones permitidas puede obtenerse un sistema equivalente a H_M cuya matriz M' es triangular superior. Aplicando esas mismas operaciones en la matriz A se obtiene

$$B = \begin{pmatrix} a & c \\ \bar{0} & M' \end{pmatrix} \quad \text{con } a = 1 \text{ ó } a = 0,$$

que es triangular superior. □

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema lineal homogéneo en $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema de ecuaciones es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 10 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

El primer paso del método de Gauss consiste en colocar en el lugar A_{11} un elemento no nulo. Para eso permutamos las filas 1 y 3 de la matriz (podría usarse también la fila 2). Se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación debemos realizar operaciones de fila de manera de conseguir que los restantes elementos de la primera columna de la matriz sean ceros. Si F_i denota la i-ésima fila de la matriz, haciendo $F_2 - 3F_1$ resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasamos ahora a la segunda columna de la matriz. El elemento ubicado en la fila 2 columna 2 de la matriz es un 1, con lo que sólo resta conseguir un 0 en la fila 3 columna 2. Para eso efectuamos $F_3 - 2F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se encuentra en forma triangular. El sistema asociado

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

es equivalente al original.
De la tercera ecuación deducimos que si $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es solución del sistema, entonces $x_3 = -x_4$. Reemplazando en la segunda ecuación y despejando x_2 se obtiene $x_2 = -x_4$. Finalmente, de la primera ecuación se deduce que $x_1 = 2x_4$. Además es claro que cualquier X que cumple estas condiciones es solución de la ecuación.
En consecuencia, las soluciones del sistema son todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ de la forma $X = (2x_4, -x_4, -x_4, x_4) = x_4(2, -1, -1, 1)$, es decir, el conjunto de las soluciones del sistema es el subespacio

$$S = < (2, -1, -1, 1) >.$$

1.2.3 Cantidad de soluciones de un sistema homogéneo

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.21 es la siguiente:

Observación 1.22 Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Supongamos que $n > m$. Entonces, por el teorema anterior, el sistema es equivalente a uno cuya matriz es triangular superior. Luego, las últimas filas de su matriz asociada son nulas y en consecuencia vemos que existe un sistema H' de n ecuaciones con n incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el de H (basta considerar las n primeras ecuaciones del sistema obtenido).

Si H es un sistema lineal homogéneo con m incógnitas, es claro que $0 \in K^m$ es una solución de H. Ésta se llama la solución trivial del sistema. En muchos casos nos interesará saber si el sistema tiene alguna solución distinta de 0 (a las que llamaremos soluciones no triviales). El siguiente resultado nos dice que en el caso de un sistema con menos ecuaciones que incógnitas esto siempre sucede.

Teorema 1.23 *Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Supongamos que $n < m$. Entonces existe $x \in K^m$, $x \neq 0$, que es solución del sistema H.*

Demostración. Por inducción en la cantidad n de ecuaciones de H.
Si $n = 1, m \geq 2$: Entonces $H : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1m}x_m = 0$. Si $a_{11} = 0$, entonces $(1, 0, \ldots, 0)$ es solución del sistema y si $a_{11} \neq 0$, entonces $(\frac{-a_{12}}{a_{11}}, 1, 0, \ldots, 0)$ es solución.
Supongamos que el resultado vale para sistemas con n ecuaciones y sea H un sistema de $n + 1$ ecuaciones con m incógnitas, $n + 1 < m$.
Triangulando la matriz del sistema, resulta que es equivalente a una de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & & B & \end{pmatrix},$$

donde $B \in K^{n\times(m-1)}$, y $m - 1 > n$.
Por lo tanto, el sistema cuya matriz asociada es B está en las condiciones de la hipótesis inductiva. Luego, existe $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \neq 0$ que es solución del sistema asociado a B.

- Si $a_{11} = 0$, entonces $(1, 0, \ldots, 0)$ es solución del sistema original.
- Si $a_{11} \neq 0$, entonces $\Big(-\frac{1}{a_{11}}.(\sum\limits_{i=2}^{m} a_{1i}x_{i-1}), x_1, \ldots, x_{m-1}\Big)$ es una solución no nula del sistema. □

El siguiente teorema se refiere a la existencia de soluciones no triviales para sistemas homogéneos con igual cantidad de ecuaciones que incógnitas. Teniendo en cuenta la observación hecha la comienzo de esta sección, esto resuelve el problema en el caso general.

Teorema 1.24 *Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas. Sea H' un sistema equivalente a H cuya matriz B es triangular superior. Entonces H tiene solución única si y sólo si $B_{ii} \neq 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq n$.*

Demostración.

($\Leftarrow$) Supongamos que $B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & B_{nn} \end{pmatrix}$ con $B_{ii} \neq 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$.

Entonces, la última ecuación del sistema H' es $B_{nn}x_n = 0$ y, como $B_{nn} \neq 0$, resulta que $x_n = 0$. Reemplazando en la ecuación anterior x_n por 0, queda $B_{n-1\,n-1}x_{n-1} = 0$, de donde $x_{n-1} = 0$.

Siguiendo de este modo, para cada $k = n-2, \dots, 1$ de la k-ésima ecuación se obtiene $x_k = 0$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $B_{11} \neq 0, \dots, B_{ii} \neq 0$ y $B_{i+1\,i+1} = 0$, o sea

$$\begin{pmatrix} B_{11} & & & & \cdots & & B_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & B_{ii} & B_{i\,i+1} & \cdots & & B_{in} \\ 0 & & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & M & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Es claro que $(1, 0, \dots, 0)$ es solución del sistema cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} \overline{0} & M \end{pmatrix}$, o sea $x_{i+1} = 1, \dots, x_n = 0$.

De la i-ésima ecuación se despeja $x_i = \frac{-B_{i\,i+1}}{B_{ii}}$.

Se sigue así para calcular los valores de todas las variables. Se obtiene una solución de H' de la forma $(x_1, \dots, x_i, 1, 0, \dots, 0)$, que es una solución no nula del sistema. $\square$

Ejemplo. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 2 & -k+1 & 1 \\ k+1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ tiene solución única.

En primer término aplicamos el método de eliminación de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 2 & -k+1 & 1 \\ k+1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3 - (k+1)F_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 0 & -k-3 & -2k+3 \\ 0 & -2k-6 & -k^2+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_3 - 2F_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 0 & -k-3 & -2k+3 \\ 0 & 0 & -k^2+4k-4 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema anterior, el sistema tiene solución única si y sólo si $k-3 \neq 0$ y $-k^2+4k-4 \neq 0$, es decir, para todo $k \in \mathbb{R} - \{3, 2\}$.

1.2.4 Sistemas lineales no homogéneos.

Para terminar, estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales en el caso general, es decir, cuando las ecuaciones que integran el sistema no necesariamente tienen por resultado al 0.

Definición 1.25 Un sistema de ecuaciones lineales

$$H : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

se dice *no homogéneo* si existe i, $1 \leq i \leq n$, con $b_i \neq 0$.
La matriz $A = (a_{ij})$ se dice la matriz asociada al sistema.
Llamaremos *sistema homogéneo asociado a H* a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{array} \right.$$

En el caso de un sistema lineal no homogéneo el conjunto de soluciones no es un subespacio (es claro que 0 no es solución). Sin embargo, el conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo está íntimamente relacionado con el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado.

Proposición 1.26 *Sea H un sistema lineal no homogeéneo. Sea S el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a H y sea p una solución particular de H. Entonces, el conjunto M de soluciones de H es $M = S + p = \{s + p : s \in S\}$.*

Demostración. Sea H el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

($\subseteq$) Sea $z \in M$. Se tiene que $z = (z - p) + p$. Luego, para probar que $z \in S + p$, basta ver que $z - p = (z_1 - p_1, \ldots, z_m - p_m) \in S$, es decir, que es solución del sistema homogéneo asociado a H.

Sea i, $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$\begin{aligned} a_{i1}(z_1 - p_1) + \cdots + a_{im}(z_m - p_m) &= (a_{i1}z_1 + \cdots + a_{im}z_m) - (a_{i1}p_1 + \cdots + a_{im}p_m) \\ &= b_i - b_i = 0 \end{aligned}$$

puesto que z y p son ambas soluciones de H. Luego, $z - p \in S$.

($\supseteq$) Sea $y \in S + p$. Entonces $y = s + p$ con $s \in S$.

Para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} a_{i1}y_1 + \cdots + a_{im}y_m &= a_{i1}(s_1 + p_1) + \cdots + a_{im}(s_m + p_m) = \\ &= (a_{i1}s_1 + \cdots + a_{im}s_m) + (a_{i1}p_1 + \cdots + a_{im}p_m) = 0 + b_i = b_i, \end{aligned}$$

puesto que p es solución de H y s es solución del sistema homogéneo asociado a H. En consecuencia, y es solución de H, es decir, $y \in M$. □

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Por la Proposición anterior, para obtener todas las soluciones del sistema basta conocer una solución particular y el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado.
Vemos que $p = (1, 0, 0, 0)$ es una solución particular del sistema.
Por otro lado, en un ejemplo anterior (página 16) hemos visto que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado es $S = < (2, -1, -1, 1) >$.
En consecuencia, el conjunto de soluciones del sistema es $< (2, -1, -1, 1) > + (1, 0, 0, 0)$.

1.3 Independencia lineal y bases

En la sección 1.1.4 introdujimos la noción de sistema de generadores de un K-espacio vectorial V. Un espacio vectorial puede tener distintos sistemas de generadores y además dos sistemas de generadores de un mismo espacio vectorial pueden tener distinta cantidad de elementos.
En esta sección veremos que para cualquier sistema de generadores G de un K-espacio vectorial V que cumpla cierta propiedad adicional, que llamaremos independencia lineal, la cantidad de elementos de G estará fija. Esto nos llevará a definir la noción de dimensión de un espacio vectorial.

1.3.1 Independencia lineal

Una cuestión que surge al considerar un sistema de generadores de un K-espacio vectorial V es la de hallar sistemas de generadores que sean minimales respecto de la inclusión, es decir, tal que ningún subconjunto propio sea también un sistema de generadores de V. Los siguientes resultados caracterizan a los conjuntos con esta propiedad.

Proposición 1.27 *Sea V un K-espacio vectorial y sea S un subespacio de V. Sea $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Entonces $< v_1, \dots, v_n > \subseteq S \iff v_i \in S \quad \forall\, 1 \le i \le n$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Para cada $1 \le i \le n$,

$$v_i = 0.v_1 + \cdots + 0.v_{i-1} + 1.v_i + 0.v_{i+1} + \cdots + 0.v_n \in < v_1, \dots, v_n > \subseteq S,$$

de donde $v_i \in S$.

($\Leftarrow$) Como $v_1, \dots, v_n \in S$ y S es un subespacio, entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in S \;\forall\, \alpha_i \in K$. Luego, $< v_1, \dots, v_n > \subseteq S$.

Corolario 1.28 *Sea V un K-espacio vectorial, y sea $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq V$. Entonces $< v_1, \dots, v_n, v_{n+1} > = < v_1, \dots, v_n > \iff v_{n+1} \in < v_1, \dots, v_n >$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Se tiene $< v_1, \dots, v_n, v_{n+1} > \subseteq < v_1, \dots, v_n >$. Entonces, por la proposición anterior, $v_{n+1} \in < v_1, \dots, v_n >$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis, $v_{n+1} \in < v_1, \dots, v_n >$. Además $v_i \in < v_1, \dots, v_n > \forall\, 1 \le i \le n$. Entonces, $< v_1, \dots, v_n, v_{n+1} > \subseteq < v_1, \dots, v_n >$.

Por otro lado, $v_i \in < v_1, \dots, v_{n+1} > \forall\, 1 \le i \le n$, y entonces vale

$$< v_1, \dots, v_n, v_{n+1} > \supseteq < v_1, \dots, v_n >.$$

Luego $< v_1, \dots, v_n, v_{n+1} > = < v_1, \dots, v_n >$. □

Introducimos ahora la noción de independencia lineal.

Definición 1.29 Sea V un K-espacio vectorial y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores de V. Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es *linealmente independiente* si

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha . v_\alpha = 0 \Rightarrow a_\alpha = 0 \quad \forall\, \alpha \in I.$$

La noción de independencial lineal está íntimamente relacionada con la minimalidad de un sistema de generadores. Más precisamente:

Observación 1.30 Sea V un K-espacio vectorial, y sean $v_1, \dots, v_n \in V$. Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si

$$< v_1, \dots, v_n > \ne < v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n > \forall\, 1 \le i \le n.$$

(Notación: $< v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n >$ denota el subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_n\} - \{v_i\}$.)

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que $< v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n > = < v_1, \dots, v_n >$. En particular

$$v_i \in < v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n >,$$

es decir, existen $\alpha_j \in K$ $(j \ne i)$ tales que $v_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \alpha_j v_j$. Entonces

$$0 = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j v_j + (-1) v_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_j v_j,$$

de donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ no es linealmente independiente.

($\Leftarrow$) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha_n \neq 0$. Entonces

$$v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_n}.v_i \ \in \ < v_1, \dots, v_{n-1} >.$$

Luego, $< v_1, \dots, v_n > = < v_1, \dots, v_{n-1} >$. $\square$

Ejemplos. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.

1. En $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,1), (1,-1,0), (0,0,1)\}$.

   Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

   $$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,-1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0).$$

   Comparando coordenada a coordenada resulta que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son solución del sistema de ecuaciones

   $$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

   Es fácil ver que este sistema tiene como única solución a la trivial.

   Luego, el conjunto $\{(1,0,1), (1,-1,0), (0,0,1)\}$ es linealmente independiente.

2. En $\mathbb{R}[X]$, $\{X^i : i \in \mathbb{N}_0\}$.

   Sean $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}_0$) tales que $\alpha_i = 0$ para casi todo $i \in \mathbb{N}_0$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \alpha_i X^i = 0$.

   Para que el elemento $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \alpha_i X^i$ de $\mathbb{R}[X]$ sea el polinomio nulo, todos sus coeficientes deben ser 0. Luego, $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, de donde el conjunto $\{X^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ es linealmente independiente.

La siguiente proposición nos permitirá obtener otro método para decidir si un conjunto de vectores en K^n es linealmente independiente (que notaremos l.i.).

Proposición 1.31 *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces*

1. $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ *es l.i.* $\iff$ $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ *es l.i.*
2. $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ *es l.i.* $\iff$ $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}$ *es l.i. para* $\lambda \in K - \{0\}$.
3. $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ *es l.i.* $\iff$ $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ *es l.i. para* $\lambda \in K$.

Demostración.

1. Se deduce del hecho que en un conjunto no interesa el orden de sus elementos.

2. Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i(\lambda v_i) + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Entonces se tiene que $\alpha_j = 0$ para cada $j \neq i$ y que $\alpha_i.\lambda = 0$. Puesto que $\lambda \neq 0$, resulta que también $\alpha_i = 0$.

   Luego, el conjunto $\{v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   Esto prueba la equivalencia, puesto que para demostrar la otra implicación basta multiplicar el i-ésimo vector del conjunto por $\frac{1}{\lambda}$.

3. Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i(v_i + \lambda v_j) + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + (\alpha_i \lambda + \alpha_j) v_j + \cdots + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

   La independencia lineal de $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ implica que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_i = \ldots = \alpha_i \lambda + \alpha_j = \ldots = \alpha_n = 0,$$

   de donde $\alpha_k = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.

   En consecuencia, el conjunto $\{v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   La otra implicación se deduce de ésta observando que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ se obtiene de $\{v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ cambiando el i-ésimo vector $v_i + \lambda v_j$ por $(v_i + \lambda v_j) + (-\lambda)v_j = v_i$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, para decidir si un subconjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de K^n es linealmente independiente podemos proceder como sigue:

- Considerar la matriz A cuyas filas son los vectores $v_1, \ldots, v_r$.
- Triangular la matriz A.
- Si la matriz obtenida tiene alguna fila nula, el conjunto es linealmente dependiente. De lo contrario, es linealmente independiente.

  En efecto, en cada paso de la triangulación, lo que se hace es cambiar el conjunto de vectores por otro conjunto como en 1., 2. o 3. de la proposición anterior. Luego, el nuevo conjunto de vectores será l.i. (resp. l.d.) si y sólo si el anterior era l.i. (resp. l.d.). Si alguna fila de la matriz obtenida es nula, es decir, uno de los vectores del conjunto de vectores obtenido es el 0, es claro que el conjunto es l.d. Por otro lado, si ninguna fila de la matriz triangular superior es nula, es fácil ver que el conjunto de vectores obtenido es l.i.

1.3.2 Bases y dimensión

Introducimos ahora el concepto de base de un espacio vectorial.

Definición 1.32 Sea V un K-espacio vectorial. Una familia $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama una *base* del espacio vectorial V si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia linealmente independiente de V que satisface $< v_\alpha >_{\alpha\in I}= V$.

Ejemplos.

1. En K^n, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, donde $(e_i)_i = 1$ y $(e_i)_j = 0$ si $j \neq i$, es una base, llamada la *base canónica de* K^n.
2. En $K^{n\times m}$, $B = \{E^{ij} \ / \ 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ es una base.
3. En $K[X]$, $B = \{X^i \ / \ i \in \mathbb{N}_0\}$ es una base.

Dos sistemas de generadores cualesquiera de un K-espacio vectorial V pueden tener distinta cantidad de elementos. Esto no sucede en el caso de dos bases y lo demostraremos para espacios vectoriales finitamente generados, lo que nos permitirá definir la dimensión de un espacio vectorial finitamente generado como la cantidad de elementos de una base cualquiera.

Teorema 1.33 *Sea V un K-espacio vectorial. Supongamos que $< v_1, \dots, v_r > = V$ y que $\{w_1, \dots, w_s\} \subseteq V$ es una familia linealmente independiente. Entonces $s \le r$.*

Demostración. Como $V = < v_1, \dots, v_r >$, para cada $1 \le i \le s$, existen $\alpha_{ij} \in K$ $(1 \le j \le r)$ tales que $w_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j$. Consideremos el siguiente sistema de r ecuaciones y s incógnitas:

$$\sum_{h=1}^{s} \alpha_{hj} x_h = 0 \qquad 1 \le j \le r. \tag{1.1}$$

Sea $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ una solución del sistema. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{s} \beta_h w_h = \sum_{h=1}^{s} \beta_h \Big(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj} v_j\Big) &= \sum_{h=1}^{s} \Big(\sum_{j=1}^{r} \beta_h \alpha_{hj} v_j\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{h=1}^{s} \beta_h \alpha_{hj} v_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{h=1}^{s} \beta_h \alpha_{hj}\Big) v_j = 0.\end{aligned}$$

Dado que $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente, debe ser $(\beta_1, \dots, \beta_s) = 0$.
En consecuencia, el sistema (1.1) tiene solución única, de donde se deduce que la cantidad de ecuaciones del sistema es mayor o igual que el número de variables, es decir $r \ge s$. □

Corolario 1.34 *Sea V un K-espacio vectorial, y sean B_1 y B_2 dos bases de V. Si $B_1 = \{w_1, \dots, w_n\}$ y $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$, entonces $n = m$.*

Demostración. Por el Teorema anterior

- B_1 sistema de generadores de V y B_2 conjunto linealmente independiente $\Longrightarrow n \geq m$.
- B_2 sistema de generadores de V y B_1 conjunto linealmente independiente $\Longrightarrow m \geq n$.

Luego, $n = m$. □

Definición 1.35 Sea V un K-espacio vectorial y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Diremos entonces que n es la *dimensión* de V (como espacio vectorial sobre K).
Por convención, la dimensión de $\{0\}$ es 0.

Notación. Si n es la dimensión del K-espacio vectorial V sobre K, escribimos $n = \dim_K V$.

Una propiedad de las bases es que cualquier vector del espacio vectorial considerado se puede expresar como combinación lineal de los elementos de la base de manera única. Como veremos más adelante, aplicando esta propiedad se trabajará en un K-espacio vectorial de dimensión n arbitrario como si fuese K^n.

Proposición 1.36 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces para cada $x \in V$ existen únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.*

Demostración. La existencia se deduce de que, por ser una base de V, $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de V.
Supongamos que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$. Luego, $\alpha_i = \beta_i \ \forall 1 \leq i \leq n$, lo que prueba la unicidad. □

La siguiente proposición muestra cómo hallar una base de un K-espacio vectorial de dimensión finita V a partir de cualquier sistema de generadores finito de V y cómo completar un subconjunto linealmente independiente arbitrario de V a una base.

Proposición 1.37 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita.*

i) *Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un sistema de generadores de V. Entonces existe un subconjunto $G \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ que es una base de V.*

ii) *Sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ un conjunto linealmente independiente de V. Entonces existen elementos $w_{r+1}, \dots, w_n \in V$ tales que $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es una base de V.*

Demostración.

i) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, entonces es una base de V.

Si no es linealmente independiente, alguno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los otros. Supongamos que $v_n \in \, < v_1, \dots, v_{n-1} >$. Consideramos ahora $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, que es un sistema de generadores de V, y procedemos inductivamente.

ii) Sea $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ una base de V.

Sea $G_0 = < w_1, \ldots, w_r >$. Consideramos

$$G_1 := \begin{cases} \{w_1, \ldots, w_r, z_1\} & \text{si } z_1 \notin < G_0 > \\ \{w_1, \ldots, w_r\} & \text{si } z_1 \in < G_0 >. \end{cases}$$

Se procede inductivamente para $2 \leq i \leq n$, es decir,

$$G_i := \begin{cases} G_{i-1} \cup \{z_i\} & \text{si } z_i \notin < G_{i-1} > \\ G_{i-1} & \text{si } z_i \in < G_{i-1} >. \end{cases}$$

Observar que $\{w_1, \ldots, w_r\} \subseteq G_i \ \forall \, 1 \leq i \leq n$.

Además, para cada $1 \leq i \leq n$, $< z_1, \ldots, z_i > \subseteq < G_i >$, y G_i es un conjunto linealmente independiente. En particular, $V = < z_1, \ldots, z_n > \subseteq < G_n >$ y G_n es linealmente independiente. Luego, G_n es una base de V. □

Ejemplos.

1. Extraer una base de $S = < (1, -1, 7, 3), (2, 1, -1, 0), (3, 1, 1, 1) >$ del sistema de generadores dado.

   Observamos que el sistema de generadores dado es linealmente dependiente. En efecto,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ \to \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -15 & -6 \\ 0 & 4 & -20 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \to \\ F_3 - \frac{4}{3}F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -15 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   y, en consecuencia, $(3, 1, 1, 1) \in < (1, -1, 7, 3), (2, 1, -1, 0) >$.

   Luego, $\{(1, -1, 7, 3), (2, 1, -1, 0)\}$ es un sistema de generadores de S. Como además es linealmente independiente, es una base de S.

2. Extender el conjunto linealmente independiente $\{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 0)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

   Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

   Con la notación utilizada en la demostración de la proposición anterior:

   Se tiene que $G_1 := \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$, que es linealmente independiente.

   Ahora, $(0, 1, 0, 0) \in < G_1 >$, puesto que $(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) - (1, 0, 0, 0)$ y entonces $G_2 := G_1$.

   El conjunto $G_2 \cup \{(0, 0, 1, 0)\}$ es linealmente independiente. Consideramos entonces $G_3 := G_2 \cup \{(0, 0, 1, 0)\}$. Puesto que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, resulta que este conjunto, formado por cuatro vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^4$, es una base de $\mathbb{R}^4$.

Como consecuencia de la proposición anterior, se obtienen los siguientes resultados sobre subespacios de un K-espacio vectorial de dimensión finita.

Observación 1.38 Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y $S \subseteq V$, entonces S es de dimensión finita.

Proposición 1.39 *Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces:*

i) $S \subseteq T \;\Rightarrow\; \dim S \leq \dim T$.

ii) $S \subseteq T$ *y* $\dim S = \dim T \;\Rightarrow\; S = T$.

Demostración.

$i)$ Sea $\{s_1, \ldots, s_r\}$ una base de S y sea $n = \dim T$. Como $S \subseteq T$, se tiene que $\{s_1, \ldots, s_r\} \subseteq T$, y además es un conjunto linealmente independiente. Luego, puede extenderse a una base de T, y en consecuencia, $\dim S = r \leq n = \dim T$.

$ii)$ Siguiendo el razonamiento de la demostración de i), al extender una base $\{s_1, \ldots, s_r\}$ de S a una de T, como $\dim S = \dim T$, no se agrega ningún vector. Luego $S = \; < s_1, \ldots, s_r > \; = T$. $\square$

Observar que el ítem ii) de la proposición anterior nos da una forma de verificar la igualdad entre dos subespacios.

Ejemplo. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^3$: $S = \; < (1, -k^2+1, 2), (k+1, 1-k, -2) >$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S = T$.

En primer lugar, veamos para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene que $S \subset T$:

- $(1, -k^2+1, 2) \in T \iff 1 + (-k^2+1) + 2 = 0 \iff k = \pm 2$
- $(k+1, 1-k, -2) \in T$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Luego, $S \subset T$ si y sólo si $k = \pm 2$.
Finalmente, para cada uno de estos valores de k, basta ver si $\dim S = \dim T$. Observar que $\dim T = 2$ (una base de T es $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$).

- Si $k = -2$, $S = \; < (1, -3, 2), (-1, 3, -2) > \; = \; < (1, -3, 2) >$, de donde $\dim S = 1$.
- Si $k = 2$, $S = \; < (1, -3, 2), (3, -1, -2) >$ y, como $\{(1, -3, 2), (3, -1, -2)\}$ es l.i. y por lo tanto una base de S, se tiene que $\dim S = 2$.

Concluimos que $S = T$ si y sólo si $k = 2$.

1.4 Suma de subespacios

Dados dos subespacios S y T de un K-espacio vectorial V la unión $S \cup T$ en general no es un subespacio de V, porque no contiene necesariamente a todos los elementos de la forma $s + t$ con $s \in S$ y $t \in T$, y un subespacio que contenga a S y a T debe contener a todos estos elementos. Esto da lugar a la noción de suma de subespacios.

1.4.1 Subespacio suma

Definición 1.40 Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Se llama *suma de S y T* al conjunto $S+T = \{v \in V \ / \ \exists\, x \in S,\ y \in T$ tales que $v = x + y\} = \{x + y \ / \ x \in S,\ y \in T\}$.

La siguiente proposición muestra que la suma de dos subespacios es, en efecto, un subespacio que contiene a ambos, y da una caracterización de este conjunto en términos de sistemas de generadores de los subespacios considerados.

Proposición 1.41 *Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Entonces:*

i) *$S + T$ es un subespacio de V.*

ii) *$S + T$ es el menor subespacio (con respeto a la inclusión) que contiene a $S \cup T$.*

iii) *Si $\{v_i\}_{i\in I}$ es un sistema de generadores de S y $\{w_j\}_{j\in J}$ es un sistema de generadores de T, $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J}$ es un sistema de generadores de $S + T$.*

Demostración.

i) $0 = 0 + 0 \in S + T$, pues $0 \in S$, $0 \in T$.

Sean $v, v' \in S + T$. Existen $x, x' \in S$, $y, y' \in T$ tales que $v = x + y$, $v' = x' + y'$. Entonces $v+v' = (x+y)+(x'+y') = (x+x')+(y+y')$, y como S y T son subespacios $x + x' \in S$, $y + y' \in T$. Luego, $v + v' \in S + T$.

Sea $v \in S + T$ y sea $\lambda \in K$. Existen $x \in S, y \in T$ tales que $v = x + y$. Entonces, $\lambda.v = \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$. Como $\lambda \in K$, $x \in S$ y S es un subespacio, resulta que $\lambda.x \in S$. Análogamente, $\lambda.y \in T$. Luego $\lambda.v \in S + T$.

En consecuencia, $S + T$ es un subespacio de V.

ii) Sea W un subespacio de V tal que $S \cup T \subseteq W$.

Sea $v \in S+T$. Entonces $v = x+y$ con $x \in S$, $y \in T$. Como $S \subseteq S\cup T \subseteq W$, entonces $x \in W$; y como $T \subseteq S \cup T \subseteq W$, entonces $y \in W$. En consecuencia $v = x + y \in W$, puesto que W es un subespacio.

Luego, $S + T \subseteq W$.

iii) Sea $v \in S + T$, $v = x + y$ con $x \in S$, $y \in T$. Dado que $\{v_i\}_{i\in I}$ es un sistema de generadores de S, existen $\alpha_i \in K$ $(i \in I)$, con $\alpha_i = 0$ salvo para finitos $i \in I$, tales que $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i v_i$. De la misma manera, existen $\beta_j \in K$ $(j \in J)$, con $\beta_j = 0$ salvo para finitos $j \in J$, tales que $y = \sum\limits_{j\in J} \beta_j w_j$. Luego

$$v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J} \beta_j w_j$$

resulta una combinación lineal de $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J}$. $\square$

Ejemplo. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S = < (1,1,0,1),(2,3,1,1) > \quad \text{y} \quad T = < (0,0,1,1),(1,2,2,1) >.$$

Hallar una base de $S + T$.

Por la proposición anterior, podemos obtener un sistema de generadores de $S+T$ mediante la unión de un sistema de generadores de S y un sistema de generadores de T. Entonces

$$S + T = < (1,1,0,1),(2,3,1,1),(0,0,1,1),(1,2,2,1) >.$$

Ahora extraemos una base del sistema de generadores hallado. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $\{(1,1,0,1),(2,3,1,1),(0,0,1,1)\}$ es una base de $S + T$.

Si S y T son dos subespacios de dimensión finita de un K-espacio vectorial V, el siguiente teorema relaciona las dimensiones de los subespacios S, T, $S \cap T$ y $S + T$.

Teorema 1.42 (Teorema de la dimensión para la suma de subespacios.) *Sea V un K-espacio vectorial. Sean S y T subespacios de V de dimensión finita. Entonces*

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

Demostración. Sean $s = \dim S$, $t = \dim T$ y $r = \dim(S \cap T)$.
Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $S \cap T$.
Sean $w_{r+1}, \ldots, w_s \in S$ tales que $\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ es una base de S, y sean $u_{r+1}, \ldots, u_t \in T$ tales que $\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_t\}$ es una base de T.
Veamos que $\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s, u_{r+1}, \ldots, u_t\}$ es una base de $S + T$:
Es claro que es un sistema de generadores de $S + T$. Veamos que un conjunto linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{i+1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=r+1}^{s} \beta_j w_j + \sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k = 0.$$

Entonces $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum\limits_{j=r+1}^{s} \beta_j w_j = -\sum\limits_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k$. Además,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=r+1}^{s} \beta_j w_j \in S \quad \text{y} \quad -\sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k \in T,$$

de donde $-\sum\limits_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k \in S \cap T$. Luego, existen $\delta_1, \ldots, \delta_r \in K$ tales que

$$-\sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k = \sum_{\ell=1}^{r} \delta_\ell . v_\ell \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k + \sum_{\ell=1}^{r} \delta_\ell . v_\ell = 0.$$

Pero $\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_t\}$ es una base de T, en particular, un conjunto linealmente independiente. Luego, $\gamma_k = 0 \; \forall \, r+1 \le k \le t$ y $\delta_\ell = 0 \; \forall \, 1 \le \ell \le r$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i . v_i + \sum_{j=r+1}^{s} \beta_j . w_j = 0,$$

y como $\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ es una base de S, resulta que $\alpha_i = 0$ para todo $1 \le i \le r$ y $\beta_j = 0$ para todo $r+1 \le j \le s$.
Luego

$$\dim(S+T) = r + (s-r) + (t-r) = s + t - r = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T). \qquad \square$$

1.4.2 Suma directa

Un caso de especial importancia de suma de subespacios se presenta cuando $S \cap T = \{0\}$.

Definición 1.43 Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Se dice que V *es suma directa de* S *y* T, y se nota $V = S \oplus T$, si:

1. $V = S + T$,
2. $S \cap T = \{0\}$.

Ejemplo. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = <(1,1,1)>$. Se tiene que $\dim S = 2$, $\dim T = 1$ y $S \cap T = \{0\}$. Entonces $\dim(S+T) = 3$, de donde $S + T = \mathbb{R}^3$. Luego, $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

Proposición 1.44 *Sea V un K-espacio vectorial. Sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Entonces, para cada $v \in V$, existen únicos $x \in S$ e $y \in T$ tales que $v = x + y$.*

Demostración.
Existencia: Como $V = S + T$, para cada $v \in V$ existen $x \in S$, $y \in T$ tales que $v = x + y$.
Unicidad: Supongamos que $v = x + y$ y $v = x' + y'$ con $x, x' \in S$, $y, y' \in T$. Entonces $x - x' = y - y'$ y $x - x' \in S$, $y - y' \in T$, luego $x - x' \in S \cap T = \{0\}$. En consecuencia $x - x' = y - y' = 0$, de donde $x = x'$, $y = y'$. $\square$

La proposición 1.41 establece que dados dos subespacios S y T de un espacio vectorial, la unión de un sistema de generadores de S y un sistema de generadores de T es un sistema de generadores de $S + T$. Esto no vale en el caso de dos bases: la unión de una base de S y una de T puede ser un conjunto linealmente dependiente. Sin embargo, la propiedad es válida en el caso en que los subespacios estén en suma directa:

Proposición 1.45 *Sea V un K-espacio vectorial. Sean S y T subespacios de V. Sean B_S y B_T bases de S y T respectivamente. Son equivalentes:*

i) $V = S \oplus T$

ii) $B = B_S \cup B_T$ *es una base de* V.

Demostración. Supongamos que $B_S = \{v_i\}_{i\in I}$ y $B_T = \{w_j\}_{j\in J}$.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Dado que B_S y B_T son sistemas de generadores de S y T respectivamente, entonces $B = B_S \cup B_T$ es un sistema de generadores de $V = S \oplus T$. Por otro lado, si

$$\underbrace{\sum_{i\in I}\alpha_i v_i}_{\in S} + \underbrace{\sum_{j\in J}\beta_j w_j}_{\in T} = 0,$$

como también se tiene $0 = 0 + 0$ con $0 \in S$ y $0 \in T$, por la proposición anterior $\sum_{i\in I}\alpha_i v_i = \sum_{j\in J}\beta_j w_j = 0$. La independencia lineal de B_S y B_T implica que $\alpha_i = 0$ $\forall\, i \in I$ y $\beta_j = 0$ $\forall\, j \in J$. Luego, B es linealmente independiente.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Como $B = B_S \cup B_T$ es una base de V, para cada $v \in V$ existen $\alpha_i \in K$, $i \in I$, y $\beta_j \in K$, $j \in J$, casi todos nulos, tales que $v = \sum\limits_{i\in I}\alpha_i v_i + \sum_{j\in J}\beta_j w_j$ y por lo tanto $v = x + y$ con $x = \sum\limits_{i\in I}\alpha_i v_i \in S$ e $y = \sum_{j\in J}\beta_j w_j \in T$. Luego $V = S + T$.

Si $v \in S\cap T$, se tiene que $v = \sum\limits_{i\in I}\alpha_i v_i = \sum\limits_{j\in J}\beta_j w_j$, de donde $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i v_i + \sum\limits_{j\in J}(-\beta_j)w_j = 0$, y por la independencia lineal de B, resulta que $\alpha_i = 0$ $\forall\, i \in I$ y $\beta_j = 0$ $\forall\, j \in J$, de donde $v = 0$ y $S \cap T = 0$. □

Definición 1.46 Sea V un K-espacio vectorial y sea $S \subseteq V$ un subespacio de V. Diremos que T es un *complemento de* S si $S \oplus T = V$.

Ejemplos.

1. Hallar un complemento de $\mathbb{R}_n[X]$ en $\mathbb{R}[X]$.

   Buscamos un subespacio S de $\mathbb{R}[X]$ tal que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus S$, es decir, $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] + S$ y $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \cap S = \{0\}$.

   Se tiene que $\mathbb{R}_n[X] = < 1, X, \dots, X^n >$.

   Consideremos $S = < X^{n+1}, \dots, X^j, \dots > = < X^i >_{i\geq n+1}$.

   Es claro que $\mathbb{R}_n[X] + S = \mathbb{R}[X]$.

   Si $f \in \mathbb{R}_n[X] \cap S$, entonces $f = 0$ o $\mathrm{gr}(f) \leq n$, y además $f = a_{n+1}X^{n+1} + \cdots + a_h X^h$ con $a_i \in \mathbb{R}$. Luego, $f = 0$.

   En consecuencia, $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus S$.

2. Sea $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \ / \ f(1) = 0\}$. Hallar un complemento de S en $\mathbb{R}[X]$.

   Vemos que $S = < (X-1)X^i >_{i\in\mathbb{N}_0}$. Sea $T = < 1 >$.

   Dado $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (f - f(1)) + f(1)$ y $f - f(1) \in S$, $f(1) \in T$. Entonces, $S + T = \mathbb{R}[X]$.

   Sea $f \in S \cap T$. Como $f \in S$, se tiene que $f = (X-1)g$ para algún $g \in \mathbb{R}[X]$ y como $f \in T$, $f = 0$ o $\mathrm{gr}(f) = 0$. Luego $f = 0$.

   Por lo tanto $S \oplus T = \mathbb{R}[X]$.